Devoir libre $n°1$
Correction

Exercice 1

1. L'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/_{2^n\mathbb{Z}}$ est égal à $U_n = \{\overline{k}/k \text{ imapir}\}$, on en déduit que cet ensemble est cardinal $\varphi(2^n) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ (φ l'indicateur d'Euler) .

2. et 3. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} 5^{2^p} - 1 &= (5^{2^{p-1}} - 1)(5^{2^{p-1}} + 1) \\ &= (5^{2^{p-2}} - 1)(5^{2^{p-2}} + 1)(5^{2^{p-1}} + 1) \\ &= 4(5^{2^0} + 1)(5^{2^1} + 1)...(5^{2^{p-1}} + 1) \end{aligned}$$

2 divise $5^s + 1$ $\forall s \in \mathbb{N}$, mais 4 ne divise pas $5^s + 1$ car $5^s + 1 \equiv 2[4]$, donc l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de $5^{2^p} - 1$ est $p + 2$. Donc $5^{2^{n-2}} - 1 = 2^n\alpha$ avec α un nombre impair. Donc $\overline{5}^{2^{n-2}} = \overline{1}$ mais $5^{2^{n-3}} - 1 = 2^{n-1}\beta$ avec β un nombre impair. Donc $\overline{5}^{2^{n-3}} \neq \overline{1}$ et $\overline{5}^{2^{n-2}} = \overline{1}$, donc $\overline{5}$ est d'ordre 2^{n-2} dans U_n.
D'autre part, on a :

$$5^{2^{n-3}} - 1 - 2^{n-1} = 2^{n-1}\beta - 2^{n-1} = 2^{n-1}(\beta - 1)$$

avec $\beta - 1$ pair. Donc $5^{2^{n-3}} \equiv 2^{n-1} + 1[2^n]$.

4. $(\overline{5}) = \{\overline{5}^k/k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de U_n de cardinal 2^{n-2}. Montrons que

$$U_n = \{\pm\overline{5}^k/0 \leq k < 2^{n-2}\}$$

Cette dernière ensemble inclus dans U_n est de cardinal 2^{n-1}, donc il suffit de montrer que $\{\overline{5}^k/0 \leq k < 2^{n-2}\} \cap \{-\overline{5}^k/0 \leq k < 2^{n-2}\} = \emptyset$.
Supposons qu'il existe i et j, $i \neq j$ tel que $\overline{5}^i = -\overline{5}^j$ et $\overline{5}^i + \overline{5}^j = 0$ ou encore $\overline{5}^{i-j} + 1 = \overline{0}$ ($j < i$) ceci est absurde car 4 ne divise pas $5^{i-j} + 1$, donc pour tout $\overline{x} \in U$, il existe $0 \leq k < 2^{n-2}$ tel que $\overline{x} = \overline{5}^k$ ou $\overline{x} = -\overline{5}^k$.

5. $U_n = \{\overline{5}^k/0 \leq k < 2^{n-2}\} \cup \{-\overline{5}^k/0 \leq k < 2^{n-2}\}$, donc U_n n'est pas cyclique.

Exercice 2

1. On considère les matrices suivantes :

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ i = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $H = \text{Vect}\{e, i, j, k\}$. Le tableau suivant résume tous les produits possibles des éléments de la famille génératrice $\{e, i, j, k\}$ de l'espace vectoriel H.

$\swarrow$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	$-k$	j
j	j	k	$-e$	$-i$
k	k	$-j$	i	$-e$

H est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ puisque c'est l'ensemble des combinaisons linéaires de e, i, j, k, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathscr{B} = (e, i, j, k)$. La famille $\mathscr{B}$ est génératrice de H ; montrons qu'elle est libre : soient $w, x, y, z \in \mathbb{K}$ tels que $we+xi+yj+zk = 0$. On a donc

$$0 = \begin{pmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & -z & y \\ y & z & w & -x \\ z & -y & x & w \end{pmatrix}$$

de sorte que, par identification, $w = x = y = z = 0$.

Comme H est un espace vectoriel, c'est en particulier un groupe abélien vis-à-vis de l'addition. Pour montrer que c'est un anneau (en fait un sous-anneau de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$), il reste à montrer qu'il contient l'élément neutre et est stable par produit. Le fait que H contienne l'élément neutre, c'est-à-dire la matrice identité e, vient de ce que cette matrice est obtenue avec $w = 1$ et $x = y = z = 0$. Montrons maintenant que H est stable par produit en considérant $M = M(w, x, y, z) = we + xi + yj + zk$ et $M' = M(w', x', y', z') = w'e + x'i + y'j + z'k$. Les propriétés du produit matriciel (associativité et distributivité par rapport à l'addition) permettent d'écrire, en tenant compte de la multiplication explicitée dans tableau précédent :

$$\begin{aligned} MM' &= (we + xi + yj + zk)(w'e + x'i + y'j + z'k) \\ &= ww'e + wx'i + wy'j + wz'k + xw'i + xx'(-e) + xy'k + xz'(-j) \\ &\quad + yw'j + yx'(-k) + yy'(-e) + yz'i + zw'k + zx'j + zy'(-i) + zz'(-1) \\ &= (ww' - xx' - yy' - zz')e + (wx' + xw' + yz' - zy')i \\ &\quad + (wy' + yw' - xz' + zx')j + (wz' + zw' + xy' - yx')k \quad (*) \end{aligned}$$

ce qui montre que $MM' \in H$.
La multiplication n'est pas commutative puisque, par exemple, $ij \neq ji$.

2. Soit $M = we + xi + yj + zk \in H\backslash\{0\}$. Cherchons une condition pour que l'inverse de M (inverse au sens du produit matriciel !) existe et appartient encore à H.
En observant la formule $(*)$, on constate qu'en choisissant $w' = w$, et $(x', y', z') = (-x, -y, -z)$, on obtient

$$\begin{aligned} MM' &= (w^2 + x^2 + y^2 + z^2)e + (-wx + xw - yz + zy)i + (-wy + yw + xz - zx)j + (-wz + zw + xy - yx \\ &= (w^2 + x^2 + y^2 + z^2)e. \end{aligned}$$

Donc une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible est que $w^2+x^2+y^2+z^2 \neq 0$. Dans ce cas, $M\dfrac{1}{w^2+x^2+y^2+z^2}M' = e$ donc M est inversible et $M^{-1} = \dfrac{1}{w^2+x^2+y^2+z^2}(we - xi - yj - zk) \in H$.

3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on remarque que $M = we+xi+yj+zk \in H\backslash\{0\}$ si, et seulement si, $w^2+x^2+y^2+z^2 \neq 0$, donc tous les éléments de $H\backslash\{0\}$ sont inversibles, donc H est un corps. Par contre si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il y a des éléments non nuls dans H qui ne sont pas inversibles, par exemple $M(1, i, 0, 0)$.

Exercice 3

1. On définit N en posant :

$$N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t.$$

— N prend ses valeurs de $\mathbb{R}^+$;
— pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$;
— pour tout $f, g \in E$, $N(f+g) = |f(0)+g(0)| + \int_0^1 |f'(t)+g'(t)|\mathrm{d}t \leq N(f)+N(g)$;
— enfin, si $N(f) = 0$, on a $|f(0)| = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t = 0$. Comme $|f'|$ est à la fois positive et continue, si son intégrale est nulle, elle est nulle sur $[0,1]$. Ainsi, f est constante sur $[0,1]$ donc nulle car $f(0) = 0$.

2. Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $x \in [0,1]$.

$$|f(x)| = |f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t = N(f).$$

On a donc pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq N(f)$ donc

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq N(f).$$

— Considérons une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $\lim\limits_{n\to\infty} N(h_n - h) = 0$. Comme $0 \leq \|h_n - h\|_\infty \leq N(h_n - h)$, on a aussi $\lim\limits_{n\to\infty} \|h_n - h\|_\infty = 0$.
On peut donc énoncer que toute suite de E qui converge pour N converge pour $\|.\|_\infty$ et vers la même limite.
— Il n'est par contre pas possible de déduire de cette seule inégalité que toute suite de E qui converge pour $\|.\|_\infty$ converge pour N.

3. (a) Le changement de variable $u = n\pi t$ donne

$$\int_0^1 |g_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 |\cos(n\pi t)|\mathrm{d}t = \int_0^{n\pi} |\cos(u)|\frac{\mathrm{d}u}{n\pi}.$$

Comme la fonction g est π-périodique et paire :

$$\begin{aligned}
\int_0^{n\pi} |\cos(u)|\frac{\mathrm{d}u}{n\pi} &= \frac{1}{n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos(u)|\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(u)|\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(u)|\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(u)|\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

(b) On pose $f_n(t) = \dfrac{\sin(n\pi t)}{t}$.

- $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 dans $(E, \|.\|_\infty)$.
- $N(f_n) = |f_n(0)| + \displaystyle\int_0^1 |\pi\cos(n\pi t)|\mathrm{d}t = 2$. Cette suite ne converge pas vers 0 dans (E, N).

(c) Ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

• • • • • • • • • •