Devoir libre $n°2$
Correction

Exercice 1

1. • Pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$, $\|P\| \geq 0$ et si $\|P\| = 0$ alors $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $|a_k| = 0$ et donc $P = 0$ et $\|0\| = 0$.

• Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda P\| = \sum_{k=0}^{n} |\lambda a_k| = |\lambda| \sum_{k=0}^{n} |a_k| = |\lambda| \|P\|$.

• Soient $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k$ deux polynômes de E. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|a_k + b_k| \leq |a_k| + |b_k|,$$

et donc $\|P + Q\| \leq \|P\| + \|Q\| y$.
En conclusion $\| \; \|$ est une norme sur E.

2. Soit $(P_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ une sous-suite de $(X^n)_{n\geq 0}$. Supposons que cette sous-suite converge dans E vers un polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Mais il existe un entier N tel que $\forall n \geq N$, $\varphi(n) > d$. Ainsi

$$\|P_{\varphi(n)} - P\| = \|X^{\varphi(n)} - \sum_{k=0}^{d} a_k X^k\| = 1 + \sum_{k=0}^{d} |a_k|.$$

Donc $\|P_{\varphi(n)} - P\|$ ne tend vers 0 et par conséquent $(X^{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ ne converge pas.
Conclusion : B n'est pas compact de E et on peut affirmer aussi que E n'est pas compact.

3. $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de B. En effet,

• $\forall \in \mathbb{N}$, $\|P_n\| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$.

• La série géométrique $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ est une série convergente, donc la suite de terme général $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ est une suite de Cauchy. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall n \geq N, \; |s_{n+p} - s_n| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $\|P_{n+p} - P_n\| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = |s_{n+p} - s_n| \leq \varepsilon$. Donc $(P_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de B.

• Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers un polynôme P de E, soit $m = \deg P$. Et alors si $n > m$:

$$\|P - P_m\| > \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^{m+1}}$$

ce qui contredirait $\lim_{n\to\infty} \|P_n - P\| = 0$. Ceci est impossible donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy non convergente dans B.
Conclusion : B n'est pas une partie complète de E et on peut conclure aussi que E n'est pas complet.

4. (a) • Soit $P_0 \in E$. Considérons la suite de terme général $P_n = P_0 + \dfrac{X^n}{n}$, $n \geq 1$. Nous avons $\|P_n - P_0\| = \|\dfrac{X^n}{n}\| = \dfrac{1}{n}$ tend vers 0, mais

$$\|f(P_n) - f(P_0)\| = \|P_n' - P_0'\| = \|n\frac{X^{n-1}}{n}\| = 1$$

ne tend vers 0. Donc f n'est pas continue en P_0 et par conséquent f n'est pas continue en aucun point de E.
• Soient P et Q deux polynômes de E. On a $\|XP\| = \|P\|$ et donc

$$\|g(P)-g(Q)\| = \|(X+1)(P-Q)\| = \|X(P-Q)+(P-Q)\| \leq \|X(P-Q)\|+\|P-Q\| \leq 2\|P-Q\|.$$

Donc g est lipschitzienne, donc continue sur E.

(b) Dans ce cas $\dim E_n$ est finie, donc les applications qui sont linéaires sont continues.

Exercice 2

1. Pour justifier le fait que $N_1(P) = 0$ implique $P = 0$ (et de même pour N_2), on utilise le fait qu'un polynôme qui admet une infinité de racines réelles est le polynôme nul. Le reste est évident.

2. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$|f(P)| = |P(0)| \leq \sup\{|P(x)|, x \in [0,1]\} = N_1(P),$$

avec égalité si P est un polynôme constant. Donc la forme linéaire f est continue pour N_1 et $\|f\| = 1$.

3. Soit $P_n(t) = \left(1 - \dfrac{t}{2}\right)^n$. Alors $|f(P_n)| = |P_n(0)| = 1$ tandis que

$$N_2(P_n) = \frac{1}{2^n},$$

et donc il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$|f(P)| \leq CN_2(P).$$

La forme linéaire f est discontinue pour N_2.

4. Les normes N_1 et N_2 ne peuvent être équivalentes, sinon f serait continue pour les deux normes, ou discontinue pour les deux normes.

5. Soit $P \in O$ et $r = |P(0)| > 0$. Alors $B_{N_1}(P, r) \subset O$: si $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $N_1(P - Q) < r$, on doit avoir en particulier

$$|Q(0)| > |P(0)| - r = 0,$$

et donc $Q \in O$. L'ensemble O est donc ouvert pour N_1. Cependant, O n'est pas ouvert pour N_2, car la suite $(1 - P_n)_n$, qui est à valeurs dans O^c, tend vers le polynôme P tel que $P(X) = 1$ pour la norme N_2, et $P \in O$. Si O était ouvert pour N_2, O^c serait fermé, et donc la limite P de la suite $(1 - P_n)_n$ d'éléments de O^c devrait appartenir à O^c, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 3

On va en fait montrer qu'il existe un chemin continu reliant toute matrice A de $SO_3(\mathbb{R})$ à I_3, ce qui implique le résultat.
Soit $A \in SO_3(\mathbb{R})$; on sait qu'il existe une matrice inversible P et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} P.$$

Alors l'application

$$\gamma : t \longmapsto P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) \\ 0 & \sin(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix} P$$

pour $t \in [0, 1]$, définit un chemin continu entre I_3 et A, contenu dans $SO_3(\mathbb{R})$, ce qui prouve que $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

• • • • • • • • •