Devoir libre $n°3$
Correction

Exercice 1

1. F étant de classe $\mathscr{C}^1$, si F admet un minimum en (m,p) alors, d'après la condition nécessaire des extremums, $\dfrac{\partial F}{\partial m}(m,p) = \dfrac{\partial F}{\partial p}(m,p) = 0$ ou encore

$$\begin{cases} -2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - mx_k - p) = 0, \\ -2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (y_k - mx_k - p) = 0. \end{cases}$$

2. On a $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k$. La seconde ligne du système à résoudre donne

$$\sum_{k=1}^{n} y_k - m\sum_{k=1}^{n} x_k - p\sum_{k=1}^{n} 1 = 0$$

D'où

$$p = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k - m\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \overline{y} - m\overline{x}.$$

Maintenant récrivons le système à résoudre :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - mx_k - p) = \sum_{k=1}^{n} x_k[(y_k - \overline{y}) - m(x_k - \overline{x})] = 0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (y_k - mx_k - p) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - \overline{y}) - m(x_k - \overline{x}) = 0. \end{cases}$$

Si on multiplie la deuxième ligne par $\overline{x}$ et qu'on la soustrait à la première, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k[(y_k - \overline{y}) - m(x_k - \overline{x})] - \overline{x}\sum_{k=1}^{n} (y_k - \overline{y}) - m(x_k - \overline{x}) = 0$$

D'où

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y} - m(x_k - \overline{x}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) - m\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 = 0.$$

Et finalement, on obtient :

$$m = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})}{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2}.$$

3. (a) Posons $A = F(0,0)$. Par hypothèse, il existe $C > 0$ tel que, pour $\|(m,p)\| \geq C$, on a $|F(m,p)| \geq A$. Posons K la boule fermé de centre O et de rayon C. K est une partie compacte (fermé et borné) de $\mathbb{R}^2$. Par continuité F admet donc un minimum, en (m_0,p_0). Mais ce minimum est aussi le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}^2$, puisque si $(m,p) \notin K$, on a

$$F(m,p) \geq A = F(0,0) \geq F(m_0,p_0).$$

Ainsi, F admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et donc une droite des moindres carrés existe.

(b) On a $F(m,p) = \sum_{k=1}^{n} [y_k^2 + (mx_k + p)^2 - 2y_k(mx_k + p)]$. Donc on peut écrire :

$$F(m,p) = \sum_{k=1}^{n} (mx_k + p)^2 + \left(-2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) m + \left(-2\sum_{k=1}^{n} y_k\right) p + \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Il suffit donc de prendre $u_k(m,p) = mx_k + p$ pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $v(m,p) = \left(-2\sum x_k y_k\right) m + \left(-2\sum_{k=1}^{n} y_k\right) p$ et $c = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$.

(c) La famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est formée de n formes linéaires de $\mathbb{R}^2$ et $\dim \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) = 2$, donc $0 \leq \mathrm{rg}(u_1, u_2, ..., u_n) \leq 2$.

La condition $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x}) \neq 0$ entraîne en particulier qu'au moins x_i et x_j tels que $x_i \neq x_j$ (sinon, ils seraient tous égaux à leur moyenne). Montrons que (u_i, u_j) est libre. Si on a une relation $au_i + bu_j = 0$, alors en évaluant en $m = 1, p = 0$ puis en $m = 0, p = 1$, on trouve le système

$$\begin{cases} ax_i + bx_j = 0, \\ a + b = 0. \end{cases}$$

dont la seule solution est $a = b = 0$. Le système est donc libre et $\mathrm{rg}(u_1, u_2, ..., u_n) = 2$.

(d) Il existe a et b des réels tels que $v = au_1 + bu_2$. Donc il suffit d'isoler les deux premiers termes de $F(m,p)$:

$$\begin{aligned} F(m,p) &= u_1(m,p)^2 + u_1(m,p)^2 + \sum_{k=3}^{n} u_k^2(m,p) + au_1(m,p) + bu_2(m,p) + c && (1) \\ &= u_1(m,p)^2 + u_1(m,p)^2 + au_1(m,p) + bu_2(m,p) + c + R(m,p) && (2) \end{aligned}$$

avec $R(m,p)) = \sum_{k=3}^{n} u_k^2(m,p) \geq 0$.

(e) Il est clair que $\lim_{\|(m,p)\| \to +\infty} (|u_1(m,p)| + |u_2(m,p)|) = \lim_{\|(m,p)\| \to +\infty} (|mx_1 + p| + |mx_2 + p|) = +\infty$.

(f) D'après ce qui précde, $\lim_{\|(m,p)\| \to +\infty} F(m,p) = +\infty$ et donc F admet un minimum absolu sur $\mathbb{R}^2$ (la question 3.(a)).

4. Il faut retransformer l'équation théorique en équation linéaire. Pour cela, on pose

$$z = \frac{1}{0.01 - y} = \alpha t + \beta.$$

Le tableau des valeurs de z, arrondies à l'unité, en fonction du temps est : L'application des formules précédentes donne alors

$t(sec)$	0	180	360	480	600	900	1200
z	100	135	170	193	216	275	332

On trouve avec PYTHON :

$$\alpha = 0,194 \text{ et } \beta = 100,143.$$

```
x=[0,180,360,480,600,900,1200]
y=[100,135,170,193,216,275,332]

def bar(x):
    res = 0
    for i in x:
        res += i/7
    return res

def sigma(x):
    res=0
    for i in x:
        res+=(i-bar(x))**2
    return res

xy=[x[i]*y[i] for i in range(0,7)]

x1=[x[i]-bar(x) for i in range(0,7)]
y1=[y[i]-bar(y) for i in range(0,7)]
xy1=[x1[i]*y1[i] for i in range(0,7)]

def my(xy1):
    res = 0
    for k in xy1:
        res += k
    return res

alpha=my(xy1)/sigma(x)
beta=bar(y)-alpha*bar(x)


alpha=0.19354730859244398
beta=100.14343029087263
```

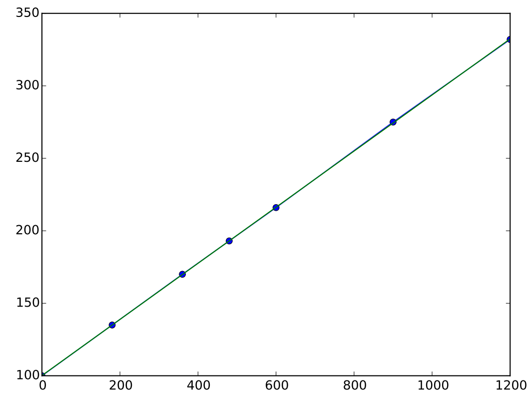

FIGURE 1 – la droite de régression $y = \alpha x + \beta$

Exercice 2

1. On va chercher γ_X de classe $\mathscr{C}^1$. Comme u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, $u \circ \gamma_X$ est constante sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\forall t \in \mathbb{R},\ \ (u \circ \gamma_X)((t) = 0$. Posons $\gamma_X(t) = (\theta_X(t), \phi_X(t), \psi_X(t))$. On a :

$$(u \circ \gamma_X)'(t) = \theta'_X(t)\frac{\partial u}{\partial t} + \phi'_X(t)\frac{\partial u}{\partial x} + \psi'_X(t)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

De (1), on déduit qu'il suffit de choisir $\theta_X(t) = t$, $\phi'_X(t) = t + x$ et $\psi'_X(t) = -t + y$. Ce sont bien des applications de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et donc $\gamma_X = (\theta_X, \phi_X, \psi_X)$ vérifie les hypothèses.

2. De la question précédente, on déduit que $\Gamma(t, x, y) = \gamma_X(t) = (t, t + x, y - t) = t(1, 1, -1) + x(0, 1, 0) + y(0, 0, 1)$. Ainsi Γ est une application linéaire, bijective de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. C'est donc un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

3. De la question 1., on déduit que si $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ vérifie (1), alors $\dfrac{\partial(u \circ \Gamma)}{\partial t}(t, x, y) = 0$ et donc $u \circ \Gamma(t, x, y) = u \circ \Gamma(0, x, y)$. En conséquence, si (2) est vérifie on a $u \circ \Gamma(t, x, y) = h(x, y)$ et, si u vérifie (1) et (2), alors $u \circ \Gamma$ est uniquement déterminé. Comme

$$u = (u \circ \Gamma) \circ \Gamma^{-1},$$

c'est l'unique solution de (1) et (2) qui soit dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. On a vu que $u \circ \Gamma(t, x, y) = u(0, x, y)$ d'où, en notant $\Gamma^{-1}(t, x, y) = (\delta(t, x, y), \alpha(t, x, y), \beta(t, x, y))$, alors

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^3, \ \ u(t, x, y) = h(\alpha(t, x, y), \beta(t, x, y)).$$

On trouve $u(t, x, y) = h(x - t, y + t)$.

• • • • • • • • • •