Devoir libre $n°4$
Correction

1. (a) Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f_i = 0$. Donc pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f_i(a) = 0$, en particulier, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $0 = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f_i(a) = \alpha_k f_k(k) = \alpha_k$. Donc la famille est bien libre.
Maintenant, soit f un élément quelconque de V_n et $\{c_0, c_1, ..., c_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par f (f prend au plus n valeurs, car elle est n-périodique).
Posons $g = \sum_{i=0}^{n-1} c_i f_i$. On a, pour tout $a \in [\![0, n-1]\!]$, $g(a) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i f_i(a) = c_i$, donc f et g coïncident sur $[\![0, n-1]\!]$ et par périodicité elles coïncident sur $\mathbb{Z}$. D'où $f = g$, c'est-à-dire f est une combinaison linéaire des $(f_i)_{0 \leq i \leq n-1}$.
En conclusion, la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ est une base de V_n, et donc $\dim V_n = n$.
   (b) On peut vérifier facilement que l'application $f \mapsto (f(0), f(1), ..., f(n-1))$ définit un isomorphisme de V_n sur $\mathbb{C}^n$.
2. (a) L'application $e_r \in V_n$ si, et seulement si, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $r^{n+a} = r^a$ ou encore si, et seulement si, $r^n = 1$. Donc l'ensemble U est celui des racines n-ième de l'unité.
   (b) Notons $r_0, r_1, ..., r_{n-1}$ les racines n-ième de l'unité. Soient $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ des scalaires tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_{r_i} = 0$. En particulier pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a
$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i r_i^k = 0.$$
Cette relation s'écrit matriciellement sous la forme :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \cdots & 1 \\ r_0 & r_1 & & \cdots & r_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ r_0^{n-1} & r_1^{n-1} & & \cdots & r_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = 0$$
Comme la matrice de Vandermonde est inversible (les r_i sont deux à deux distincts), alors nécessairement $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = 0$. Donc la famille $(e_r)_{r \in U}$ est libre et comme il s'agit d'une famille à n éléments alors c'est une base de V_n.
3. (a) Soit λ une valeur propre de φ et $f \in V_n$ un vecteur propre non nul associé à λ. Donc $\forall a \in Z,\ \ f(a+1) = \lambda f(a)$. Ceci entraine $\forall a \in Z$:
$$f(a) = \lambda f(a-1) = \lambda^2 f(a-2) = ... = \lambda^n f(a-n) = \lambda^n f(a).$$
f étant non nulle, donc il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $f(a) \neq 0$. L'égalité précédente donne $\lambda^n = 1$. Donc λ est une racine n-ième de l'unité.
   (b) On remarque que pour $r \in U$, on a $\varphi(e_r)(a) = r^{a+1} = rr^a = re_r(a)$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$, donc $\varphi(e_r) = re_r$, c'est-à-dire r est une valeur propre de φ. En conclusion, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{U}$ et pour chaque $r \in U$, le sous-espace propre associé à la valeur propre r est $E_r(\varphi) = \mathrm{Vect}(e_r)$.
Puisque $\mathrm{card}\, U = \mathrm{card}\, \mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{n}$, l'endomorphisme φ est diagonalisable, donc on retrouve le fait que $(e_r)_{r \in U}$ est une base de V_n(la question 2.b). La relation $(*)$ est donc vérifiée pour toute f.

(c) D'après la question précédente, φ est diagonalisable.

4. (a) Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\varphi(f_k)(a) = f_k(a+1) = f_{k-1}(a)$, donc $\varphi(f_k) = f_{k-1}$. De plus $\varphi(f_0) = f_{-1} = f_{n-1}$. D'où la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) On trouve $\chi_\varphi(X) = X^n - 1$, c'est un polynôme scindé à racines simples donc l'endomorphisme φ est diagonalisable.

5. Notons $\mathscr{C}(\varphi)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec φ. Il est évident que $\mathrm{Vect}\{\mathrm{Id}, \varphi, ..., \varphi^{n-1}\} \subset \mathscr{C}(\varphi)$. Soit $\psi \in \mathscr{C}(\varphi)$, alors il existe des scolaires $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ tels que

$$(*) \quad \psi(f_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f_i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^i(f_0),$$

car la famille $(f_i)_{0 \le i \le n-1}$ est une base de V_n. Donc ψ et $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^i$ coïncident en f_0. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\psi(f_k) = \psi(\varphi^k(f_0)) = \psi \circ \varphi^k(f_0) \overbrace{=}^{\text{car} \quad \varphi\circ\psi = \psi\circ\varphi} \varphi^k \circ \psi(f_0) \underbrace{=}_{\text{d'aprs} \quad (*)} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^{i+k}(f_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^i(f_k).$$

Donc ψ et $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha_i \varphi^i$ coïncident dans une base donc ils sont égaux. Ainsi $\mathscr{C}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}\{\mathrm{Id}, \varphi, ..., \varphi^{n-1}\}$ et par suite $\mathscr{C}(\varphi) = \mathrm{Vect}\{\mathrm{Id}, \varphi, ..., \varphi^{n-1}\} = \mathbb{C}[\varphi]$.

•••••••• •