Devoir libre $n°5$
Correction

PREMIÈRE PARTIE : THÉORÈME DE PROJECTION SUR UN CONVEXE FERMÉ

1. Cette relation est déjà vu dans le cours ; c'est l'égalité du parallélogramme.

2. Avec $u = y - x$ et $v = y' - x$ on obtient :

$$\|\frac{y-y'}{2}\|^2 = \frac{1}{2}(\|y-x\|^2 + \|y'-x\|^2 - \|\frac{y+y'}{2} - x\|^2$$

Et comme $\frac{y+y'}{2} \in C$, puisque C est convexe, alors $\|\frac{y+y'}{2} - x\| \geq d_C(x)^2$, d'où l'inégalité demandée :

$$\left\|\frac{y-y'}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|y-x\|^2 + \|y'-x\|^2\right) - d_C(x)^2.$$

3. Supposons qu'il existe α et β dans C tels que $\|x-\alpha\| = \|x-\beta\| = d_C(x)$. On prend $s = \alpha - x$ et $t = \beta - x$. On a : $\|s+t\|^2 + \|s-t\|^2 = 2(\|s\|^2 + \|t\|^2)$ et donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|\alpha-\beta\|^2 &= d_C(x)^2 + d_C(x)^2 - \frac{1}{2}\|\alpha+\beta-2x\|^2 \\ &= d_C(x)^2 + d_C(x)^2 - 2\left\|\frac{\alpha+\beta}{2} - x\right\|^2 \\ &\leq d_C(x)^2 + d_C(x)^2 - 2d_C(x)^2 = 0.\end{aligned}$$

Donc $\beta = \alpha$.

4. $\{\|x-y\|/y \in C\}$ est un ensemble de réels non vide, minoré par 0, donc admet une borne inférieure. Donc il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d_C(x).$$

Montrons que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, pour cela il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy, puisque $\mathbb{R}^n$ est complet. D'après 2., on a pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$:

$$\|y_p - y_q\|^2 \leq 2[(\|y_p - x\|^2 - d_C(x)^2)\| + (\|y_q - x)\|^2 - d_C(x)^2)]$$

et comme $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n - x\| = d_C(x)$, alors la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Soit $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Comme C est un fermé, on a $\alpha \in C$ et

$$\|x-\alpha\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = d_C(x).$$

L'unique point $\alpha \in C$ (la question 3.) s'appelle la projection de x sur la partie convexe et fermé C.

DEUXIÈME PARTIE : PROPRIÉTÉS

1. On a pour tout $b \in C$ et $x \in E$: $\|x - p(x)\|^2 \leq \|x-b\|^2$, d'où en écrivant que :

$$\|x-b\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + 2(x-p(x)|p(x)-b) + \|p(x)-b\|^2,$$

il vient

$$2(x-p(x)|b-p(x) \leq \|p(x)-b\|^2.$$

On peut écrire cette inégalité pour $b = (1-t)p(x) + ta \in C,\quad t \in]0,1[$, puisque C est convexe. Il vient alors

$$2(x-p(x)|a-p(x)) \leq t\|p(x)-a\|^2$$

pour tout $t \in]0,1[$. D'où en faisant tendre t vers 0 :

$$(x-p(x)|a-p(x)) \leq 0.$$

2. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \|p(x)-p(y)\|^2 & = & (p(x)-x|p(x)-p(y)) + (x-y|p(x)-p(y)) + (y-p(y)|p(x)-p(y)) \\ & \leq & (x-y|p(x)-p(y)), \end{array}$$

ceci compte tenue de la propriété de la question 1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'en déduire :

$$\|p(x)-p(y)\| \leq \|x-y\|.$$

Donc p est 1-lipschitzienne.

3. *i.* On a pour tout $a \in C$ et $x \in \mathbb{R}^n \backslash C$: $\|x-p(x)\|^2 \leq \|x-a\|^2$, d'où

$$\|a-p(x)\|^2 + 2(x-a|a-p(x)) \leq 0$$

En particulier pour $a = p(x_0)$, on a

$$2(x-p(x_0)|p(x_0)-p(x)) \leq -\|p(x)-p(x_0)\|^2$$

ii. On a pour tout $a \in C$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash C$: $\|x_0-p(x_0)\|^2 \leq \|x_0-a\|^2$ et par suite

$$0 \leq \|p(x_0)-a\|^2 + 2(x_0-p(x_0)|p(x_0)-a)$$

En sélectionnant $a = p(x)$ on en déduit :

$$-\|p(x_0)-p(x)\|^2 - 2(x_0-x|p(x_0)-p(x)) \leq 2(x-p(x_0)|p(x_0)-p(x))$$

TROISIÈME PARTIE : DIFFÉRENTIABILITÉ DE LA FONCTION DISTANCE

1. Considérons $(x, y) \in \Omega^2$: On a pour tout $c \in C$:

$$f(x) \leq \|x-c\| \leq \|x-y\| + \|y-c\|,$$

d'où

$$f(x) - \|x-y\| \leq \|y-c\|,$$

et par suite $f(x) - \|x-y\| \leq f(y)$. x et y jouant des rôles symétriques, il vient

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\|.$$

2. (a) Vérification immédiate.

(b) Posons $\triangle(x, x_0) = \|x-x_0\|^2 + 2(x-p(x_0)|p(x_0)-p(x)) + \|p(x)-p(x_0)\|^2$. Les inégalités qui précèdent permettent de voir que :

$$\begin{array}{rcl} \triangle(x, x_0) & \geq & \|x-x_0\|^2 - 2(x_0-x|p(x_0)-p(x)) \\ & \geq & \|x-x_0\|^2 - 2\|x-x_0\|\|p(x)-p(x_0)\| \\ & \geq & \|x-x_0\|^2 - 2\|x-x_0\|^2 \\ & = & -\|x-x_0\|^2. \end{array}$$

puis

$$\|x-x_0\|^2 + 2(x-p(x_0)|p(x_0)-p(x)) + \|p(x)-p(x_0)\|^2 \leq \|x-x_0\|^2.$$

Donc

$$\|x-x_0\|^2 + 2(x-p(x_0)|p(x_0)-p(x)) + \|p(x)-p(x_0)\|^2 = o(\|x-x_0\|)$$

au voisinage de x_0.
D'où :

$$f(x) - f(x_0) - \left(\frac{2(x_0 - p(x_0)}{B(x_0)} | x - x_0 \right) = \frac{\triangle(x, x_0)}{B(x)} + 2(x - x_0 | x_0 - p(x_0)) \left(\frac{1}{B(x)} - \frac{1}{B(x_0)} \right)$$

et par conséquent :

$$f(x) - f(x_0) - \left(\frac{2(x_0 - p(x_0)}{B(x_0)} | x - x_0 \right) = o(\|x - x_0\|)$$

Cette égalité montre que f est différentiable en x_0 et que

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \frac{1}{\|x_0 - p(x_0)\|}(x_0 - p(x_0)).$$

• • • • • • • • • •