Devoir libre $n°6$
Correction

1. (a) Puisque $x \neq 2k\pi$, alors $e^x \neq 1$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n} e^{ipx} &= e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} \\ &= e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\frac{e^{\frac{-inx}{2}}-e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{-ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}} = e^{i(n+1)\frac{x}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

D'où $|S_n(x)| \leq \left|\sum_{p=1}^{n} e^{ipx}\right| \leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f(n)$ et $b_n = \sin(nx)$ où $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+p} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n+p-1} S_k(x)(b_k - b_{k+1}) + S_{n+p}(x)b_{n+p}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} u_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(x)(b_k - b_{k+1}) + S_n(x)b_n = \sum_{k=1}^{n} S_k(x)(b_k - b_{k+1}) + S_n(x)b_{n+1}.$$

Donc

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)(b_k - b_{k+1}) + S_{n+p}(x)b_{n+p} - S_n(x)b_{n+1},$$

d'où

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k(x)|(b_k - b_{k+1}) + |S_{n+p}(x)|b_{n+p} + |S_n(x)|b_{n+1} \\ &\leq \frac{1}{|\sin(\frac{x}{2})|}\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k - b_{k+1}) + b_{n+p} + b_{n+1}\right) \\ &\leq \frac{2b_{n+1}}{|\sin(\frac{x}{2})|} = \frac{2f(n+1)}{|\sin(\frac{x}{2})|}\end{aligned}$$

(c) Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, la série est clairement convergente. Supposons maintenant $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et posons $U_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. Comme $(f(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, il est de même pour la suite $\left(\frac{2f(n+1)}{|\sin(\frac{x}{2})|}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, donc $\forall\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a $\left|\frac{2f(n+1)}{\sin(\frac{x}{2})}\right| \leq \varepsilon$. On obtient donc $\forall(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ vérifie $n \geq n_0$ $|U_{n+p} - U_n| \leq \varepsilon$. Ainsi la suite de sommes partielles $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy, donc convergente, c'est-à-dire la série numérique de terme général $u_n(x)$ est convergente.

Sur $I = [2k\pi + a, 2(k+1)\pi - a]$, $0 < a < \pi$, on a $|U_{n+p}(x) - U_n(x)| \leq \frac{2f(n+1)}{|\sin(\frac{a}{2})|}$, donc la convergence est uniforme sur I.

2. (a) Il est clair que $y_n(\pi) = 0$, et $\forall x \in]0, 2\pi[$

$$y_n'(x) = \sum_{p=1}^{n} \cos px = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}},$$

car

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \mathrm{Re}(\sum_{p=1}^{n} e^{ipx}) = \cos(n+1)\frac{x}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x}{2}}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}.$$

D'où

$$\forall x \in]0,\pi[, y_n(x) = \frac{\pi - x}{2} + \int_{\pi}^{x} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Posons $h(t) = \dfrac{1}{\sin(\dfrac{t}{2})}$ pour $t \in [x,\pi]$. Donc par une intégration par parties on obtient :

$$\int_{x}^{\pi} h(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} + \int_{x}^{\pi} h'(t)\cos(n+\frac{1}{2})tdt\right).$$

Ainsi $v_n(x) = 2\dfrac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$ et $w_n(x) = 2h'(x)\cos(n+\dfrac{1}{2}x.$

(b) $\forall x \in [\alpha,\beta]$ on a $\forall t \in [x,\pi] \subset [\alpha,\pi]$ $\sin\dfrac{\alpha}{2} \leq \sin\dfrac{t}{2} \leq 1$, donc :

$$\left|y_n(x) - \frac{\pi - x}{2}\right| \leq \frac{2}{2n+1}\left(\int_{x}^{\pi}\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}dt + \sup_{t\in[\alpha,\beta]}|h'(t)|(\pi - x)\right) \leq \frac{M}{2n+1}$$

où

$$M = 2(\beta-\alpha)\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \sup_{t\in[\alpha,\beta]}|h'(t)|\right),$$

ce qui montre que la suite de terme général y_n converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha,\beta]$ vers la fonction

$$y : x \to y(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

3. (a) Il résulte de la question II.2.(a) que la série $\sum_{n\geq 1} z_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, elle converge aussi pour $x = 2k\pi$, donc elle converge simplement sur $\mathbb{R}$.
D'après la question II.2.(b), on a pour tout $x \in]0,\pi[$:

$$\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin px}{p} = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{p=1}^{n} z_p$ est impaire donc la limite simple $\sum_{p=1}^{\infty} z_p$ est impaire. D'où $\forall x \in]-\pi,0[,\ \ \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} z_p(x) = -\frac{\pi-(-x)}{2} = -\frac{\pi + x}{2}.$

En conclusion :

$$\forall x \in]0,\pi[\ \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin px}{p} = \frac{\pi - x}{2},\ \ \forall x \in]-\pi,0[\ \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\sin px}{p} = -\frac{\pi + x}{2}$$

(b) Remarquons que la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^p}{2p+1}$ est une série alternée dont le terme général tend vers 0, donc convergente. D'après ce qui précède

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

4. La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$, et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$, on peut donc prolonger $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ en une fonction continue sur $[0,1]$ en posant

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } \ x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$

D'où $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^1 \widetilde{f}(x)dx$.
Soit $x \in]0,1]$ fixé. Appliquons la formule de Taylor-Lagrange à la fonction ln entre 1 et $1+x$, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists c_n \in]1, 1+x[$ tel que :

$$\ln(1+x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \ln^{(k)}(1) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \ln^{(n+1)}(c_n) = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)c_n},$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{\ln(1+x)}{x} - \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^{k-1} \right| \leq \frac{1}{n+1},$$

ou encore

$$\forall x \in]0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \widetilde{f}(x) - \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^{k-1} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Cette inégalité valable aussi pour $x = 0$, donc on a montré que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n-1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $\widetilde{f}$. Ainsi

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \widetilde{f}(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 x^{n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

• • • • • • • • •