Devoir libre n°7

Correction

1. (a) Si $x = 0$, il est clair que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(0)$ est absolument convergente.

Pour $x \neq 0$, appliquons la règle de D'Alembert : On a :

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{|x + \lambda(n+1)|^n}{|x + \lambda n|^{n-1}} \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{|\frac{x}{\lambda(n+1)} + 1|^n}{|\frac{x}{\lambda n} + 1|^n} \frac{|x + \lambda n|}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = e$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = |\lambda|e$. Donc la série est absolument convergente pour $|\lambda| < \frac{1}{e}$ et divergente pour $|\lambda| > \frac{1}{e}$.

- (b) Si $\lambda = \frac{1}{e}$, $|f_n(x)| = |x| \frac{|x + \frac{n}{e}|^{n-1}}{n!} \underset{+\infty}{\sim} |x| \frac{|x + \frac{n}{e}|^{n-1}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{|x|}{|x + \frac{n}{e}| \sqrt{2\pi n}} \left|\frac{x + \frac{n}{e}}{\frac{n}{e}}\right|^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e|x|}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{xe}}{n^{\frac{3}{2}}}$

Donc, d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge pour $|\lambda| = \frac{1}{e}$.

Même raisonnement si $\lambda = \frac{-1}{e}$.

2. (a) Soit $\lambda \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right]$. Pour tout $x \in I_a =]-a, a[$ ($a > 0$), on a $|f_n(x)| \leq \frac{a(a + |\lambda|n)^{n-1}}{n!} = \alpha_n$ et la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$ converge donc la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ converge normalement et donc uniformément sur I_a . Chaque f_n étant continue sur $\mathbb{R}$, donc F_λ est continue sur $\mathbb{R}$.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{(x + \lambda n)^{n-1}}{n!} + \frac{(n-1)x(x + \lambda n)^{n-2}}{n!} \\ &= \frac{(x + \lambda n)^{n-2}}{n!} (x + \lambda n + (n-1)x) \\ &= (x + \lambda) \frac{((x + \lambda) + \lambda(n-1))^{n-2}}{(n-1)!} = f_{n-1}(x + \lambda). \end{aligned}$$

Comme précédemment, la série des dérivées $\sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n$ est uniformément convergente sur tous les intervalles de la forme I_a , de plus chaque f'_n est continue donc d'après le théorème du cours F_λ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$F'_\lambda(x) = F_\lambda(x + \lambda).$$

Puisque on a $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}(x + \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x + \lambda) = F_\lambda(x + \lambda)$.

3. (a) La relation en question est vraie pour $n = 0$, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$. Supposons la relation est vraie à l'ordre $n - 1$ et montrons la pour l'ordre n . En particulier, on a :

$$f_{n-1}(x + y + \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x + \lambda) f_{n-1-k}(x)$$

et d'après la question 2.b, on a :

$$f'_n(x+y) = f_{n-1}(x+y+\lambda).$$

Posons $h(x, y) = \sum_{k=0}^n f_k(x)f_{n-k}(y)$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) &= \sum_{k=1}^n f'_k(x)f_{n-k}(y) \\ &= \sum_{k=1}^n f_{k-1}(x+\lambda)f_{n-k}(y) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_k(x+\lambda)f_{n-1-k}(y) \\ &= f_{n-1}(x+y+\lambda). \end{aligned}$$

Donc $h(x, y) - f_n(x+y)$ est constante qui vaut, par exemple, $h(0, y) - f_n(y) = 0$. D'où $h(x, y) = f_n(x+y)$, donc la propriété est bien démontrée pour n .

- (b) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les deux séries $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ et $\sum_{n \geq 0} f_n(y)$ sont absolument convergentes, donc la série produit de Cauchy des ces deux séries est absolument convergente sur $\mathbb{R}$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k(x)f_{n-k}(y) \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y) \right) = F_\lambda(x)F_\lambda(y).$$

L'égalité de la question précédente montre que

$$F_\lambda(x)F_\lambda(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k(x)f_{n-k}(y) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x+y) = F_\lambda(x+y).$$

4. (a) Si une solution de l'équation fonctionnelle $(E) : f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ s'annule en un point x_0 alors elle est identiquement nulle, car $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x-x_0+x_0) = f(x-x_0)f(x_0) = 0$. La relation $f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2$ montre que toute solution non nulle est strictement positive. Si f est solution de (E) alors $f(0)$ vaut 0 ou 1, en effet, $f(0) = f(0)^2$. Si $f(0) = 0$, f est identiquement nulle. Les fonctions constantes solutions de (E) sont l'application nulle et l'application constante égale à 1. Soit f une solution non identiquement nulle de (E) . En dérivant l'égalité

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

par rapport à x , on obtient

$$f'(x+y) = f'(x) \cdot f(y) \text{ puis en prenant } y \text{ égal à } 0$$

$$f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$$

On a montré alors que f est solution de l'équation différentielle :

$$y'(x) = f'(0) \cdot y(x) \quad y(0) = 1.$$