Devoir libre $n^\circ 08$
Correction

Première partie

1. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $f'_\lambda(x) = -x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}(1-x^{\frac{1}{\lambda}})^{\lambda-1}$, donc $\forall x \in]0,1[$, $f'_\lambda(x) < 0$, ainsi f_λ est strictement décroissante sur $]0,1[$.
   D'autre part, $\forall x \in]0,1[$, $f''_\lambda(x) = \dfrac{\lambda-1}{\lambda}x^{\frac{1-2\lambda}{\lambda}}(1-x^\lambda)^{\lambda-2}$, d'où :
   - si $0 < \lambda < 1$, f''_λ est négative sur $]0,1[$, et donc f_λ est strictement concave,
   - si $\lambda = 1$, $f_1(x) = 1-x$, f_λ est donc affine,
   - si $\lambda > 1$, f''_λ est positive sur $]0,1[$, et donc f_λ est strictement convexe.
2. Pour montrer que la droite $y = x$ est un axe de symétrie, il suffit de vérifier que si $(x,y) \in \Gamma_\lambda$, alors $(y,x) \in \Gamma_\lambda$. On a :
   $$\begin{aligned} f_\lambda(y) &= f_\lambda(1-x^{\frac{1}{\lambda}})^\lambda \\ &= \left[1-(1-x^{\frac{1}{\lambda}})^{\lambda\frac{1}{\lambda}}\right]^\lambda \\ &= x \end{aligned}$$
   Donc la droite $y = x$ est bien axe de symétrie commun à tous les courbes Γ_λ.
   L'abscisse S_λ est déterminée par l'équation $(1-x^{\frac{1}{\lambda}})^\lambda = x$, donc $x = \dfrac{1}{2^\lambda}$, d'où $S_\lambda = \left(\dfrac{1}{2^\lambda}, \dfrac{1}{2^\lambda}\right)$.
3. D'après la question 1., on a :
   - si $0 < \lambda < 1$, f_λ est strictement concave sur $]0,1[$, donc Γ_λ tourne la concavité vers les $y < 0$,
   - si $\lambda = 1$, $\Gamma_1(x)$ est un segment de droite, donc Γ_λ n'a pas de concavité,
   - si $\lambda > 1$, f_λ est strictement convexe sur $]0,1[$, donc Γ_λ tourne la concavité vers les $y < 0$.
4. Soit $\lambda = \dfrac{1}{n} < 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), donc $f_{\frac{1}{n}}$ est strictement concave, donc on a
   $$f_{\frac{1}{n}}\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{2}f_{\frac{1}{n}}(a) + \frac{1}{2}f_{\frac{1}{n}}(b)$$
   ou encore
   $$\frac{1}{2}(1-a^n)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(1-b^n)^{\frac{1}{n}} \leq (1-\frac{a+b^n}{2})^{\frac{1}{n}}$$
   d'où
   $$\frac{1}{2^n}[(1-a^n)^{\frac{1}{n}} + (1-b^n)^{\frac{1}{n}}]^n \leq 1 - \frac{(a+b)^n}{2^n}$$
   finalement,
   $$(a+b)^n + [(1-a^n)^{\frac{1}{n}} + (1-b^n)^{\frac{1}{n}}]^n \leq 2^n.$$
   Si $\lambda = n$, alors f_n est strictement convexe. Le même raisonnement montre que
   $$\sqrt[n]{a+b} + \sqrt{(1-\sqrt[n]{a})^n + (1-\sqrt[n]{b})^n} \geq \sqrt[n]{2}.$$

Deuxième partie

1. Posons $g_\lambda(t) = t^{\lambda-1}(1-t)^\lambda$. g_λ est continue sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1]$, $|g_\lambda| \leq t^{\lambda-1} = \dfrac{1}{t^{1-\lambda}}$ et comme $1-\lambda < 1$, g_λ est absolument intégrable sur $]0,1]$, par suite $F(\lambda)$ est bien définie pour $\lambda > 0$.
2. L'aire du domaine est donnée par $\mathscr{A}(\lambda) = \displaystyle\int_0^1 f_\lambda(x)\mathrm{d}x$, avec le changement de variable $x = t^\lambda$, on obtient $\mathscr{A}(\lambda) = F(\lambda)$.
3. a. L'aire du triangle OAS_λ est $\dfrac{\left(\frac{1}{2^\lambda}\right)\times 1}{2} = \dfrac{1}{2^{\lambda+1}}$.
   - si $0 < \lambda < 1$, f_λ est concave sur $]0,1[$, donc $\dfrac{1}{2^{\lambda+1}} \leq \dfrac{F_\lambda}{2}$.
   - si $\lambda = 1$, $\dfrac{1}{2^{\lambda+1}} = \dfrac{F_\lambda}{2}$.
   - si $\lambda > 1$, f_λ est convexe sur $]0,1[$, donc $\dfrac{1}{2^{\lambda+1}} \geq \dfrac{F_\lambda}{2}$.

   b. Si $\lambda \in]0,1[$, on a $\dfrac{1}{2^\lambda} \leq F(\lambda)$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2^\lambda} = 1$, donc $F(\lambda)$ est inférieure à l'aire du carré de cotés $[OA]$ et $[OB]$, donc $\dfrac{1}{2^\lambda} \leq F(\lambda) \leq 1$ et par conséquent $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0} F(\lambda) = 1$.
   Si $\lambda > 1$, on a $0 \leq F(\lambda) \leq \dfrac{1}{2^\lambda}$, donc $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = 0$.

   c. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq F(n) \leq \dfrac{1}{2^n}$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} F(n)$ converge et sa somme vérifie l'inégalité
   $$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} F(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - D'après le formule d'intégration par parties généralisée
$$\int_0^b f(x)g^{(n)}(x)\mathrm{d}x = \left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)g^{(n-k-1)}(x)\right]_a^b + (-1)^n\int_a^b f^{(n)}g(x)\mathrm{d}x,$$
on a
$$\begin{aligned} F(n) &= n\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t \\ &= n\left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}t^{n-1}+\dots-\frac{(n-1)!(1-t)^{2n}}{(2n)(2n-1)\dots(n+1)}\right]_0^1 \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad (1)\end{aligned}$$
   - La formule de binome donne :
$$(1-t)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \complement_n^k t^k.$$
Donc
$$\begin{aligned} F(n) &= n \in_0^1 t^{n-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\complement_n^k t^k\mathrm{d}t \\ &= n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\complement_n^k\int_0^1 t^{n+k-1}\mathrm{d}t \\ &= n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\complement_n^k}{n+k} \qquad (2)\end{aligned}$$
De (1) et (2) nous déduisons que
$$n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\complement_n^k}{n+k} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

5. a. La fonction $x \mapsto y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est solution de (E) si, et seulement si,
$$-2a_0 + 2a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}[(4n-2)a_n - na_{n-1}]x^n = 0,$$
donc $-2a_0 = 0$, $2a_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $(4n-2)a_n = na_{n-1}$, d'où $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \geq 2$,
$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = F(n).$$

Nous pouvons remarquer que cette relation reste vraie pour $n = 1$. Le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ peut être obtenu par la règle de D'Alembert :
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{4},$$
donc $R = 4$.
D'après ce qui précède, la somme de la série entière de terme général $a_n x^n$ est solution de (E) pour $x \in]-4,4[$. De $a_0 = 0$ et $a_n = F(n)$ $(n \geq 1)$ nous déduisons que $y(1) = \sigma$.

b. i. Pour $x \in]0,4[$, on pose $u = \sqrt{\frac{4-x}{x}}$, donc $\mathrm{d}x = \frac{8u\mathrm{d}u}{(1+-u^2)^2}$, d'où :
$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{4-x}{x}}\mathrm{d}x &= -8\int\frac{u^2\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} \\ &= \frac{4u}{1+u^2} - 4\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2)} \\ &= \frac{4u}{1+u^2}4\arctan u + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$
D'où
$$\int\sqrt{\frac{4-x}{x}}\mathrm{d}x = x\sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4\arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) + c.$$

ii. La solution générale y_0 de l'équation homogène associé à (E) est donnée par
$$y_0(x) = k\exp\left(\int\frac{x+2}{x(4-x)}\mathrm{d}x\right), \quad x \in]0,4[, \ k \in \mathbb{R}.$$
Or $\frac{x+2}{x(4-x)} = \frac{1}{2x} + \frac{3}{2(4-x)}$, donc $\int\frac{x+2}{x(4-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{2}\ln(4-x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ Donc $y_0(x) = k\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}$ $(0 < x < 4)$ où k est une constante réelle.

iii. D'après ce qui précède la solution générale de (E) est donc
$$x \mapsto (x\sqrt{\frac{4-x}{x}} - 4\arctan\left(\sqrt{\frac{4-x}{x}}\right) + c)\frac{\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}},$$

soit

$$x \mapsto \frac{x}{4-x} - \frac{4}{4-x}\sqrt{\frac{x}{4-x}}\left(\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} - c'\right), \quad c' = \frac{c}{4}.$$

La constante c' étant fixé, nous avons, pour $0 < x < 4$

$$\frac{y(x)}{x} = \frac{1}{4-x} - \frac{4}{4-x}\sqrt{\frac{1}{4-x}}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} - c'\right), \quad c' = \frac{c}{4}$$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} = \frac{\pi}{2}$, donc si $c' \neq \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\left|\frac{y(x)}{x}\right| = +\infty$. Si nous voulons une limite finie, nous devrons nécessairement avoir $c' = \frac{\pi}{2}$, supposons donc $c' = \frac{\pi}{2}$, de la relation $\arctan(t) + \arctan\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$ $(t > 0)$ et $\arctan t \sim t$ au voisinage de 0, nous déduisons

$$\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \frac{\pi}{2}x = -\arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}} \sim -\sqrt{\frac{x}{2}}$$

au voisinage de 0. Donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{y(x)}{x} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, et donc la solution correspondant à $c' = \frac{\pi}{2}$ est donc l'unique solution répondant au problème.

La fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} F(n)x^n$ est aussi solution de (E) sur $]0,4[$ et vérifie

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{y(x)}{x} = a_1 = \frac{1}{2}.$$

D'après l'unicité d'une telle solution, on a

$$\forall x \in]0,4[, \sum_{n=1}^{\infty} F(n)x^n = \frac{x}{4-x} - \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)\sqrt{4-x}}\left(\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Or $\arctan\sqrt{\frac{4-x}{x}} - \frac{\pi}{2} = -\arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}}$ et on peut remarquer que la fonction

$$x \mapsto \arcsin\sqrt{\frac{x}{4}} + \arctan\sqrt{\frac{x}{4-x}}$$

est constante sur $[0,4[$ (la dérivée est nulle), comme elle s'annule en $x = 0$, elle identiquement nulle, d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n)x^n = \frac{1}{4-x}\left(x + 4\sqrt{\frac{x}{4-x}}\arcsin\sqrt{\frac{x}{4}}\right)$$

c. Nous avons $\sigma = y(1)$, donc $\sigma = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)$.

••••••••••