

Devoir libre n°9

Correction

PREMIÈRE PARTIE

1. Le vecteur $(a, b, c) \in \ker u$ si, et seulement si, $X(a + b + c) = Y(a + b + c) = Z(a + b + c) = 0$.
 - Si $(X, Y, Z) \neq (0, 0, 0)$, $\ker u = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / a + b + c = 0\}$, c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, engendré, par exemple, par les vecteurs $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$.
 - Si $(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$, alors $M = 0$ et $\ker u = \mathbb{R}^3$.
 Dans tous les cas M n'est pas inversible.

2.
 - a. On peut vérifier facilement que $M^2 = (X + Y + Z)M = SM$.
 - b. M est un projecteur si, et seulement si, $S = 0$.
 - c. Si $S = 0$, alors $M^2 = 0$, donc π_M divise le polynôme X^2 . Les valeurs propres d'une matrice sont les racines du polynôme caractéristique χ_M et sont aussi du polynôme minimal π_M , donc 0 est l'unique valeur propre de M .
 - d. M vérifie $M^2 - SM = 0$, donc π_M divise le polynôme $X(X - S)$.
 - Si $\pi_M = X$, alors $M = 0$.
 - Si $\pi_M = X - S$, alors $M = SI_3$.
 - Si $\pi_M = X(X - S)$, alors M est diagonalisable si, et seulement si, $S \neq 0$.
3.
 - a. Il est évident que (f_1, f_2) est une base de $\ker u$ et f_3 est une base de $\text{Im} u$. De plus $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$ implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donc la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.
 - b. (f_1, f_2, f_3) est une base de vecteurs propres de u , puisque $u(f_1) = u(f_2) = 0$ et $u(f_3) = Sf_3$, d'où :

$$\Delta = \text{Mat}(u, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

- c. D'après b) M est diagonalisable et $\text{Sp}(M) = \{0, S\}$.

- i. On a $M = P\Delta P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & X \\ -1 & 1 & Y \\ 0 & -1 & Z \end{pmatrix}$. Donc

$$K_\alpha = P\Delta P^{-1} - \alpha I_3 = P\Delta_\alpha P^{-1}$$

où

$$\Delta_\alpha = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & S - \alpha \end{pmatrix}.$$

- ii. K_α est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq S$.
- iii. On a $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + I_3 = M - \alpha I_3$. avec $\alpha = -1$ et $S = -1$. A est donc diagonalisable et $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$. Il est évident que A n'est pas inversible puisque son spectre contient 0.

DEUXIÈME PARTIE

1. On a $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p) = npq$.

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n p(X = k)t^k = \sum_{k=0}^n \mathbb{C}_n^k (tp)^k (1 - p)^{n-k} = (tp + 1 - p)^n.$$

On a $(X + Y)(\Omega) = \{0, 1, \dots, 2n\}$ et $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$ $(X + Y = k) = \bigcup_{i=0}^k (X = i, Y = k - i)$. D'où :

$$\begin{aligned} p(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^k p(X = i)p(Y = k - i) \\ &= \sum_{i=0}^k \mathbb{C}_n^i p^i (1 - p)^{n-i} \mathbb{C}_n^{k-i} p^{k-i} (1 - p)^{n-k+i} \\ &= p^k (1 - p)^{2n-k} \sum_{i=0}^k \mathbb{C}_n^i \mathbb{C}_n^{k-i} \\ &= \mathbb{C}_{2n}^k p^k (1 - p)^{2n-k} \end{aligned}$$

Donc $X + Y$ suit une binomiale de paramètres $2n$ et p .

REMARQUE : Pour l'égalité $\mathbb{C}_{2n}^k = \sum_{i=0}^k \mathbb{C}_n^i \mathbb{C}_n^{k-i}$, comparer les coefficients de X^k dans l'égalité polynomiale $(1 + X)^{2n} = (1 + X)^n (1 + X)^n$. Comme précédemment on peut montrer que S suit une binomiale de paramètres $3n$ et p .

2. Puisque M n'est jamais inversible, alors la probabilité pour que M soit inversible est nulle.

3. Notons B l'événement " M est un projecteur ". Alors $p(B) = p(S = 1) = \mathbb{C}_{3n}^1 p(1-p)^{3n-1} = 3np(1-p)^{3n-1}$.
4. Il est clair, d'après la première partie, que $T(\Omega) = \{1, 2\}$ (deux valeurs propres possibles 0 et S).
- $p(T = 1) = p(S = 0) = \mathbb{C}_{3n}^0 p^0(1-p)^{3n} = (1-p)^{3n}$
 - $p(T = 2) = p(S \neq 0) = 1 - p(S = 0) = 1 - (1-p)^{3n}$.

$$E(T) = 1 \times (1-p)^{3n} + 2 \times (1 - (1-p)^{3n}) = 2 - (1-p)^{3n}$$

$$V(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = \dots$$

Notons D l'événement " M est diagonalisable ". Alors $p(D) = p(S \neq 0) = p(T = 2) = 1 - (1-p)^{3n}$.

5. a. Notons E l'événement " au moins une des lignes de M est égale à la somme des deux autres ", on a :

$$\begin{aligned} E &= (Z = X + Y) \cup (Y = X + Z) \cup (X = Y + Z) \\ &= (Z = S - Z) \cup (Y = S - Y) \cup (X = S - X) \end{aligned}$$

D'où

$$p(E) = 3p(X = S - X) = 3p(S = 2X)$$

D'autre part,

$$(S = 2X) = (S = 2X) \cap \left(\bigcup_{k=0}^n (X = k) \right) = \bigcup_{k=0}^n (S = 2X, X = k) = \bigcup_{k=0}^n (S = 2k).$$

D'où :

$$p(E) = 3 \sum_{k=0}^n \mathbb{C}_{3n}^{2k} p^{2k} (1-p)^{3n-2k}.$$

- b. Notons F l'événement " les valeurs de propres de M sont des entiers pairs ". On a $\text{Sp}(M) = \{0, S\}$, donc $p(F) = p(S = 2X) = p(E)$.

• • • • •