

Devoir libre $n^{\circ}10$

Correction

1. a. Si X est une variable aléatoire réelle, on note f_X la densité de X . On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{X_n}(t) = 1_{]0, +\infty[}(t) \frac{1}{x} e^{-\frac{t}{x}}$. La densité de S_2 est donnée par $f_{S_2}(t) = f_{X_1+X_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(u) f_{X_2}(t-u) du$ qui est nulle si $t \leq 0$. Si $t > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} f_{S_2}(t) = f_{X_1+X_2}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(u) f_{X_2}(t-u) du \\ &= \int_0^t f_{X_1}(u) f_{X_2}(t-u) du \\ &= \frac{1}{x^2} t e^{-\frac{t}{x}} \end{aligned}$$

La densité de S_2 est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{S_2}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} t e^{-\frac{t}{x}} & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$

Supposons maintenant que

$$f_{S_{n-1}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t^{n-2} e^{-\frac{t}{x}}}{x^{n-1} (n-2)!} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Alors, pour $t > 0$

$$\begin{aligned} f_{S_n}(t) = f_{S_{n-1}+X_n}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_{n-1}}(u) f_{X_n}(t-u) du \\ &= \int_0^t f_{S_{n-1}}(u) f_{X_n}(t-u) du \\ &= \frac{t^{n-1} e^{-\frac{t}{x}}}{x^n (n-1)!} \end{aligned}$$

D'où, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_{S_n}(t) = 1_{]0, +\infty[}(t) \frac{t^{n-1} e^{-\frac{t}{x}}}{x^n (n-1)!}$.

- b. Notons F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$. On a donc $\forall u \in \mathbb{R}$, $F_n(u) = p\left(\frac{S_n}{n} \leq u\right) = p(S_n \leq nu) = F_{S_n}(nu)$, d'où :

$$\varphi_n(t) = F'_n(t) = n F'_{S_n}(nt) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{t^{n-1} e^{-\frac{nt}{x}}}{\left(\frac{x}{n}\right)^n (n-1)!} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Alors $\frac{S_n}{n}$ suit la loi Gamma $\gamma\left(n, \frac{n}{x}\right)$.

2. a. On remarque que $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = x$, donc, d'après la loi fiable des grands nombres appliquée à la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right) = 0$.

- b. f étant continue en x , donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall y \in [0, +\infty[$, $|x - y| < \alpha$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. En particulier, $\forall w \in \Omega$, $\left|\frac{S_n(w)}{n} - x\right| \leq \alpha \implies \left|f\left(\frac{S_n(w)}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$.

La contraposition de cette implication s'écrit :

$$\forall w \in \Omega, \left|f\left(\frac{S_n(w)}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon \implies \left|\frac{S_n(w)}{n} - x\right| > \alpha,$$

c'est-à-dire, en termes d'ensembles :

$$\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right) \subset \left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

- c. D'après la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right) \subset \left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

D'où

$$p\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right) \leq p\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right).$$

Comme $\alpha > 0$, il résulte du a que le membre droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

3. a. Soit $w \in \Omega$. Si $w \in A_n$, alors $1_{A_n}(w) = 1$ et donc $\left|f\left(\frac{S_n(w)}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$. Si $w \notin A_n$, alors $\left|f\left(\frac{S_n(w)}{n}\right) - f(x)\right| \leq 2M$. Donc l'inégalité demandée est bien vérifiée.

- b. Il faut d'abord démontrer que, pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ possède une espérance mathématique. En effet, f étant bornée, il en est de même de la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$. La densité φ_n de $\frac{S_n}{n}$ est nulle sur $] -\infty, 0[$. L'inégalité,

$$\forall x \geq 0, |f(x)\varphi_n(x)| \leq M\varphi_n(x),$$

montre que la variable $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ possède une espérance, la variable constamment égale à $f(x)$ possède également une espérance. Par linéarité la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)$ admet aussi une espérance et bien entendu :

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x).$$

On rappelle alors que, lorsqu'une variable aléatoire X possède une espérance, la valeur absolue en possède une aussi et l'on a l'inégalité :

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|).$$

D'où

$$\left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)\right| = \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| \leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right).$$

L'inégalité de la question 3.a. permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) &\leq \mathbb{E}(\varepsilon 1_{A_n} + 2M(1 - 1_{A_n})) \\ &\leq \varepsilon p(A_n) + 2M(1 - p(A_n)) \\ &\leq \varepsilon + 2Mp(\overline{A_n}) \end{aligned}$$

D'après 2.a, $\lim_{n \rightarrow \infty} p(\overline{A_n}) = 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$$2Mp(\overline{A_n}) \leq \varepsilon. \text{ D'où } \forall n \geq n_0, \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) \leq 2\varepsilon \text{ et donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = f(x) = 0.$$

4. a. On sait, d'après le théorème de transfert, que

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\varphi_n(t)dt = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{t^{n-1}e^{-\frac{nt}{x}}}{\left(\frac{x}{n}\right)^n (n-1)!} dt$$

ce qui s'écrit également :

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1}f(t)e^{-\frac{nt}{x}} dt$$

Ainsi, d'après 3.b,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n-1)!x^n} \int_0^{+\infty} t^{n-1}f(t)e^{-\frac{nt}{x}} dt$$

Comme $f \in E$, la fonction $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}, L(f)^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} f(t)t^k e^{-xt} dt$$

D'où :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n (-1)^{n-1}}{(n-1)!x^n} L(f)^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right).$$

- b. Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$, telle que $L(f) = 0$, donc $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, L(f)^{(k)}(x) = 0$, donc la formule d'inversion montre que $f(x) = 0$ pour tout $x > 0$. De plus, comme f est continue à droite en 0, le passage à la limite, dans la relation $f(x) = 0$, quand x tend vers 0 donne $f(0) = 0$. Donc f est nulle sur $[0, +\infty[$.
- c. Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$, telle que $L(f)(x) = 0$ pour tout $x \in]a, +\infty[$ ($a > 0$). Considérons l'application définie sur $[0, +\infty[$ par $\varepsilon_a : t \rightarrow e^{-at}$. On peut vérifier facilement que la fonction $\varepsilon_a f \in E$ et que

$$\forall x > 0, L(\varepsilon_a f)(x) = L(f)(x+a).$$

Mais pour $x > 0, x+a \in]a, +\infty[$ et donc $L(f)(x+a) = 0$, donc $L(\varepsilon_a f)(x) = 0$ pour tout $x > 0$. Comme $\varepsilon_a f$ est bornée, alors $\varepsilon_a f = 0$ sur $[0, +\infty[$. La fonction ε_a ne s'annule jamais, il en résulte que f est nulle sur $[0, +\infty[$.

.....