

Devoir libre n°1

Correction

Exercice : Étude de la suite géométriques $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $z \in \mathbb{C}$.

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

Pour que la suite $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge il faut et il suffit que les suites réelles définies par :

$$|z|^n (\cos(n\theta) \text{ et } |z|^n \sin(n\theta))$$

convergent. Ces deux suites convergent dans les deux cas suivants :

- i. $|z| < 1$,
- ii. $|z| = 1$ et $\theta \equiv 0[2\pi]$.

Étude de cas ii. se ramène à l'étude des suites de termes généraux : $u_n = \cos(n\alpha + \varphi)$ et $v_n = \sin(n\alpha + \varphi)$ où α et φ sont des réels.

1. Supposons que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent et admettent des limites u et v . On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_{n-1} &= \cos((n+1)\alpha + \varphi) + \cos((n-1)\alpha + \varphi) = 2 \cos(n\alpha + \varphi) \cos(\alpha) \\ v_{n+1} + v_{n-1} &= \sin((n+1)\alpha + \varphi) + \sin((n-1)\alpha + \varphi) = 2 \sin(n\alpha + \varphi) \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_{n-1} &= 2u_n \cos(\alpha) \\ v_{n+1} + v_{n-1} &= 2v_n \cos(\alpha) \\ u_n^2 + v_n^2 &= 1 \end{aligned}$$

Par passage à la limite, dans les relations précédentes, on déduit les relations :

$$u(1 - \cos(\alpha)) = 0 \quad (1)$$

$$v(1 - \cos(\alpha)) = 0 \quad (2)$$

$$u^2 + v^2 = 1 \quad (3)$$

De la relation (3) il résulte que u et v ne sont pas nuls tous les deux, par suite $\cos(\alpha) = 1$ ou encore $\alpha = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peuvent être toutes deux convergentes que si $\alpha = 2k\pi$.

Inversement, si $\alpha = 2k\pi$ on a $u_n = \cos(\varphi)$, $v_n = \sin(\varphi)$. Les deux suites convergent.

2. Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u , on fait aucune hypothèse sur la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a :

$$v_n \sin(\alpha) = u_n \cos(\alpha) - u_{n+1}.$$

La suite $(v_n \sin(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $u(\cos(\alpha) - 1)$. Cela implique que $\sin(\alpha) = 0$, sinon la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ serait convergente vers $\frac{u(\cos(\alpha) - 1)}{\sin(\alpha)}$ et d'après 1. α serait égal à $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ce qui est en contradiction avec $\sin(\alpha) \neq 0$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger que si $\sin(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Inversement, si $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $u_n = \cos(nk\pi + \varphi) = (-1)^{nk} \cos(\varphi)$.

(a) Si k est pair, $u_n = \cos(\varphi)$ admet une limite $u = \cos(\varphi)$.

- (b) Si k est impair, $u_n = (-1)^n \cos(\varphi)$ n'admet une limite que si $\cos(\varphi) = 0$, c'est-à-dire $\varphi = \frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. La limite dans ce cas est 0.
3. On remarque que $v_n = \cos\left(n\alpha + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$, donc d'après 2. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger que si $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Inversement, supposons $\alpha = k\pi$.

- (a) Si k est pair, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet la limite $\sin(\varphi)$.
- (b) Si k est impair, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet une limite que si $\sin(\varphi) = 0$, c'est-à-dire $\varphi = l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. La limite est alors 0.

Conclusion : La suite géométrique complexe $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si, $z = 1$ ou $|z| < 1$.

Problème : Sous-groupes additifs de $(\mathbb{R}, +)$

1. Le sous-groupe G n'est pas discret si et seulement si

$$\forall \alpha > 0, G \cap]0, \alpha[\neq \emptyset.$$

Supposons que G ne soit pas discret, considérons un réel x quelconque et un $\alpha > 0$. Il existe un élément $g \in G \cap]0, \alpha[$. Appelons n la partie entière de $\frac{x}{g}$. On a alors

$$ng \leq x < ng + g$$

ou encore

$$ng + g < ng + \alpha \leq x + \alpha.$$

Donc $(n+1)g \in G \cap]x, x + \alpha[$, car G est stable.

2. (a) Si x et y sont dans I , $|x - y| \leq \frac{\alpha}{2} < \alpha$. En particulier, si x et y sont deux éléments distincts de $G \cap I$, $x - y$ ou $y - x$ est un élément de $G \cap]0, \alpha[$ ce qui est impossible. Un intervalle quelconque de longueur finie est toujours inclus dans l'union d'un nombre fini d'intervalles de longueur $\frac{\alpha}{2}$. Par conséquent, l'intersection de G avec un tel intervalle est toujours vide ou finie.
- (b) Comme G n'est pas réduit à $\{0\}$, il existe un g non nul dans G . Comme $-g \in G$ on peut supposer $g > 0$. Considérons alors l'ensemble

$$G \cap]0, g].$$

Il est non vide (il contient g) et fini d'après la question précédente. Il admet donc un plus petit élément que l'on note m . Montrons que

$$m = \min(G \cap \mathbb{R}_+^*).$$

On sait déjà que

$$m \in G \cap]0, g] \subset \mathbb{R}_+^*$$

D'autre part, si $k \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ deux cas sont possibles

$k \leq g$ alors $k \in G \cap]0, g]$ donc $m \leq k$,

$g < k$ alors $m < k$ car $m \leq g$.

Ceci montre bien que m est un minorant de $G \cap]0, g]$, donc le plus petit élément de cet ensemble.

- (c) D'après la définition d'un sous-groupe (stabilité)

$$\mathbb{Z}m \subset G.$$

Réciproquement, soit $g \in G \cap \mathbb{R}_+^*$, posons k égal à la partie entière de $\frac{g}{m}$. On a alors

$$k \leq \frac{g}{m} < k + 1$$

$$km \leq g < (k + 1)m$$

$$0 \leq g - km < m$$

A cause des propriétés de stabilité de G , $-km \in G$ et $g - km \in G \cap [0, m[$. D'après la définition de m , il est impossible que $g - km \in G \cap \mathbb{R}_+^*$. Ceci entraîne $g - km = 0$, c'est à dire $g = km$, donc $g \in \mathbb{Z}m$. D'où $G = \mathbb{Z}m$.

3. (a) Vérification facile des propriétés de sous-groupes.
 (b) Si S est discret, d'après la question 2., il existe $m > 0$ tel que $S = \mathbb{Z}m$. Comme $x = 1.x + 0.y \in S$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x = pm$. De même, $y = 0.1 + 1.y \in S$ il existe donc $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $y = qm$. On en déduit

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Réciproquement, supposons

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Alors

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Notons m ce nombre réel. On a $x = pm$ et $y = qm$ donc x et y sont dans $\mathbb{Z}m$. De plus, pour tous les entiers i et j ,

$$ix + jy = (ip + jq)m \in \mathbb{Z}m,$$

donc $S \subset \mathbb{Z}m$. Ceci entraîne que $S \cap]0, m[$ est vide donc que S est discret.

4. (a) Si $A \cap B$ était non vide, il existerait des entiers non nuls p et q tels que $px = qy$. On aurait alors

$$\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}.$$

Ce qui est absurde. Donc $A \cap B = \emptyset$.

- (b) D'après 3., S est un sous-groupe qui n'est pas discret. Pour tout $\alpha > 0$, il existe donc des entiers m et n tels que

$$mx + ny \in]0, \alpha[.$$

Lorsque $\alpha < \min(x, y)$, m et n sont tous les deux non nuls. Posons $a = mx$, $b = -ny$. Alors $a \in A$ et $b \in B$ donc

$$\forall \alpha < \min(x, y), \inf\{|a - b|, (a, b) \in A \times B\} \leq \alpha$$

On en déduit que cette borne inférieure est nulle.

5. Considérons un intervalle quelconque $[u, v]$ dans $[-1, 1]$, on doit montrer qu'il existe un entier n tel que $\cos(n) \in [u, v]$.
 Posons $\alpha = \arccos(v)$, $\beta = \arccos(u)$ et formons l'intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$. Comme 2π est irrationnel, le sous-groupe additif $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe donc des entiers m et n tels que $m + 2\pi n \in [\alpha, \beta]$. On en déduit que $\cos m \in [u, v]$ ce qu'il fallait montrer.

Remarque : Cette question montre, en particulier, que la suite $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente, parce qu'elle admette une infinité de valeurs d'adhérences.

• • • • •