Devoir libre n°2
Correction

Partie A. Questions préliminaires

1. Rappelons que, par définition, la famille $(\varphi_\lambda)_\lambda$ est libre si, et seulement si, toute sous-famille finie est libre. Considérons donc, pour un entier $n > 1$ arbitrairement choisi, une famille

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$$

et une relation de liaison

$$\alpha_1\varphi_{\lambda_1} + \alpha_2\varphi_{\lambda_2} + \quad + \alpha_n\varphi_{\lambda_n} = 0$$

Si $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq (0, 0, ..., 0)$, alors on peut supposer, par exemple, que $\alpha_1 \neq 0$. Par conséquent,

$$\forall x \in [0, 1], x^{\lambda_1} = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1}x^{\lambda_2} + ... + \frac{-\alpha_n}{\alpha_1}x^{\lambda_n}$$

ou encore

$$\forall x \in [0, 1], 1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1}x^{\lambda_2-\lambda_1} + ... + \frac{-\alpha_n}{\alpha_1}x^{\lambda_n-\lambda_n}.$$

Comme $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$, alors le second membre tend vers 0 en 0, ce qui n'est pas cohérent avec le premier membre

2. Il est clair que $R(a_1) = ... = R(a_{n-1}) = 0$. Par conséquent, on obtient les inégalités :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & R(a_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & R(a_{n-1}) \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{vmatrix} = R(a_n)D_{n-1}$$

en développant le deuxième déterminant par la dernière colonne.
En supposant que la fraction rationnelle R admet un développement de la forme indiquée, on peut développer par la dernière colonne le déterminant, on obtient :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & R(a_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & R(a_{n-1}) \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} A_k \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_k} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & \frac{1}{a_n+b_k} \end{vmatrix}.$$

C'est une combinaison de déterminants nuls sauf le dernier, il ne reste donc que A_nD_n.
On a ainsi démontré que $A_nD_n = R(a_n)D_{n-1}$.

3. Si les réels b_k ne sont pas deux à deux distincts, alors D_n est nul (il y a deux colonnes égales) et la formule donnée par l'énoncé est nulle elle aussi.
Supposons donc que les réels b_k sont deux à deux distincts. Dans ce cas, la fraction rationnelle R n'a que des pôles simples et admet donc une décomposition en éléments simples de la forme

$$R = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X + b_k}$$

où les A_k sont des réels déterminés par la méthode usuelle dans le cas d'une fraction à pôles simples. En particulier, $A_n = \lim_{x \to -b_n} (x+b_n)R(x)$, c'est-à-dire

$$A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{-b_n - a_k}{-b_n + b_k} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_k + b_n}{b_n - b_k} \neq 0$$

par hypothèse de l'énoncé. On déduit alors de 2. que

$$D_n = \left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_n - b_k}{a_k + b_n}\right] \left[\prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_n - a_k}{a_n + b_k}\right] \frac{D_{n-1}}{a_n + b_n}$$

et comme

$$D_1 = \frac{1}{a_1 + b_1}$$

on en déduit par récurrence la formule fournie par l'énoncé.

Partie B. Distance d'un point à une partie

4. Comme

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|,$$

il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\|x - y_n\|$ tende vers $d(x, A)$. Si $d(x, A) = 0$, alors $\|x - y_n\|$ tend vers 0, ce qui signifie que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et donc que x est adhérent à A.
Réciproquement, si x est adhérent à A, alors il existe une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Comme une borne inférieure est un minorant, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\| \leq \|x - y_n\|$$

et comme $\|x - y_n\|$ tend vers 0, alors $d(x, A) = 0$ d'après le théorème d'encadrement.

5. On a $A_n \subset A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(x, A) \leq d(x, A_n).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $d(x, A)$ comme borne inférieure, il existe $y \in A$ tel que

$$d(x, A) \leq \|x - y_\varepsilon\| \leq d(x, A) + \varepsilon.$$

Par définition de A, il existe donc un entier n_0 tel que $y \in A_{n_0}$ et par conséquent $y \in A_n$ pour tout $n \geq n_0$. En particulier,

$$\forall n \geq n_0, \quad d(x, A_n) = \inf_{y \in A_n} \|x - y\| \leq \|x - y_\varepsilon\|$$

et finalement

$$\exists n_0 \in \mathrm{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad d(x, A) \leq d(x, A_n) \leq d(x, A) + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ a été arbitrairement choisi, cela signifie que $\lim_{n\to\infty} d(x, A_n) = d(x, A)$.

6. a. La partie $B \cap V$ est bornée en tant que partie contenue dans la boule B, qui est bornée. Elle est fermée en tant qu'intersection de deux fermés : la boule fermée B et le sous-espace V de dimension finie. En tant que partie fermée et bornée de l'espace de dimension finie V, c'est une partie compacte de V et donc une partie compacte de E.

   b. Comme $B \cap V \subset V$, alors $d(x, V) \leq d(x, B \cap V)$ (cf 5.). Réciproquement, comme $V = (B \cap V) \cup (B^c \cap V)$, donc

$$d(x, V) = \min\{\inf_{y \in B\cap V} \|x - y\|, \inf_{y \in B^c \cap V} \|x - y\|\}.$$

   Comme V est un espace vectoriel, V contient le vecteur nul, donc

$$d(x, V) = \inf_{y \in V} \|x - y\| \leq \|x - 0\| = \|x\|.$$

   Si $y \in B^c \cap V$, alors $\|x - y\| > \|x\| \geq d(x, V)$, donc

$$d(x, V) = \inf_{y \in B\cap V} \|x - y\| = d(x, B \cap V).$$

7. La fonction $y \to \|x-y\|$ est continue (elle est lipschitzienne d'après l'inégalité triangulaire), donc elle atteint un minimum sur le compact $B \cap V$: il existe donc un élément y_0 de $B \cap V \subset V$ tel que

$$d(x, V) = \inf_{y \in B \cap V} \|x-y\| = \|x-y_0\|.$$

Partie C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie

8. Comme V est un sous-espace de dimension finie, le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur V est bien défini.
Par 7., il existe $y_0 \in V$ tel que

$$\|x-y_0\| = d(x, V) \leq \|x-p(x)\|$$

puisque $p(x) \in V$. Comme $x-p(x)$ est orthogonal à V, alors

$$\|x-y_0\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-y_0\|^2$$

d'après le théorème de Pythagore. Si $y_0 \neq p(x)$, alors $\|p(x)-y_0\| > 0$ donc $\|x-y_0\| > \|x-p(x)\|$, ce qui contredit l'inégalité précédente.
Par conséquent, le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur V est l'unique élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x-y\|$.

9. On note M au lieu de $M(x_1, ..., x_n)$.
• Si $G(x_1, ..., x_n) = 0$, alors la matrice carrée M n'est pas inversible et il existe une matrice colonne non nulle

$$U = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

telle que $MU = 0$ et donc telle que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\|^2 = {}^tUMU = 0.$$

On en déduit que $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0$ et donc que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée (puisque les α_k ne sont pas tous nuls).
• Réciproquement, si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée, alors il existe une famille $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de scalaires non tous nuls telle que

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0.$$

Par linéarité à droite du produit scalaire, on en déduit que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x_i | x_j) = (x_i | \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j) = 0$$

ce qui signifie que la matrice colonne (non nulle)

$$U = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

vérifie $MU = 0$. Par suite, la matrice M n'est pas inversible et son déterminant est nul.

10. Par 8.,

$$\begin{aligned} d(x, V)^2 = \|x-p(x)\|^2 &= (x-p(x) | x-p(x)) \\ &= (x | x-p(x) \\ &= \|x\|^2 - (x | p(x)) \end{aligned}$$

puisque $p(x)$ et $x-p(x)$ sont orthogonaux.
Comme $p(x) \in V$, il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que $p(x) = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n$ et comme l'opération

$$C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k C_k$$

ne modifie pas la valeur d'un déterminant, on en déduit que le déterminant $G(x_1, ..., x_n, x)$, égal à

$$\begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) & (x_1|x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n|x_1) & \dots & (x_n|x_n) & (x_n|x) \\ (x|x_1) & \dots & (x|x_n) & (x|x) \end{vmatrix}$$

est aussi égal à

$$\begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) & (x_1|x-p(x)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n|x_1) & \dots & (x_n|x_n) & (x_n|x-p(x)) \\ (x|x_1) & \dots & (x|x_n) & (x|x-p(x)) \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire à

$$\begin{vmatrix} (x_1|x_1) & \dots & (x_1|x_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_n|x_1) & \dots & (x_n|x_n) & 0 \\ (x|x_1) & \dots & (x|x_n) & (x|x) \end{vmatrix}$$

puisque le vecteur $x - p(x)$ est orthogonal à V, il est orthogonal aux vecteurs $x_1, ..., x_n$ qui engendrent V. En développant par la dernière colonne, on en déduit que

$$G(x_1, ..., x_n, x) = \|x - p(x)\|^2 G(x_1, ..., x_n).$$

Comme la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre, le déterminant $G(x_1, ..., x_n)$ n'est pas nul (par 9.), ce qui permet d'en déduire la distance de x à V.

Partie D. Comparaison des normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$

11. Toute fonction continue sur un segment est bornée, donc $\|.\|_\infty$ est bien définie et c'est un majorant de $\|f\|$, donc

$$\forall t \in [0, 1], \quad |f(t)|^2 \leq \|f\|_\infty^2.$$

Sur le segment $[0, 1]$, les fonctions continues et en particulier les fonctions constantes sont intégrables, donc

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty^2 dt = \|f\|_\infty^2$$

et finalement

$$\forall f \in \mathcal{C}([0, 1]), \quad \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty.$$

Soit A, une partie de $\mathcal{C}([0, 1])$ et g, un point adhérent à A pour la norme $\|.\|_\infty$. Il existe donc une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à A telles que $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\|_\infty = 0$.
D'après l'inégalité établie ci-dessus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \|g - f_n\|_2 \leq \|g - f_n\|_\infty$$

donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g pour la norme $\|.\|_2$, ce qui prouve que g appartient aussi à l'adhérence de A pour $\|.\|_2$.

12. On sait que l'adhérence d'une partie quelconque de E est une partie fermée de E. L'adhérence de V est donc une partie fermée de l'espace vectoriel E, qui n'est pas vide (elle contient V). Il reste à vérifier que cette adhérence est stable par combinaison linéaire.
Soient f et g, deux points adhérents à V : il existe deux suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers f et g. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda f + g$, donc $\lambda f + g$ appartient bien à l'adhérence de V.
Ainsi, l'adhérence d'un sous-espace de E est un sous-espace fermé de E.

13. a. Considérons les fonctions f_n définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si } n \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si } \quad n \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

On a :

$$\int_0^1 |\varphi(_0 t) - f_n(t)|^2 dt = \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nt)^2 dt = \frac{1}{3n}.$$

La suite $(f_n)_{n>1}$ converge donc vers φ_0 pour la norme $\|.\|_2$, c'est-à-dire $\varphi_0 \in \overline{V_0}^2$.

b. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Comme

$$f = [f(0)\varphi_0] + [f - f(0)\varphi_0],$$

la fonction f est une combinaison linéaire d'une fonction (φ_0) qui appartient à l'adhérence de V_0 pour la norme $\|.\|_2$ et d'une fonction qui appartient à V_0 et donc à l'adhérence de V_0.
Comme V_0 est un espace vectoriel, son adhérence pour la norme $\|.\|_2$ est encore un espace vectoriel (12.), donc f appartient à l'adhérence de V_0 pour $\|.\|_2$. Ainsi, le sous-espace V_0 est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour $\|.\|_2$.
Pour tout $f \in V_0$,

$$\|f - \varphi_0\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - \varphi_0(t)| \geq |f(0) - \varphi_0(0)| = 1.$$

Il est donc impossible qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V_0 converge vers $\varphi_0 \in \mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $\|.\|_\infty$. Cela démontre que V_0 n'est pas dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour $\|.\|_\infty$.

14. Supposons que V soit dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour une norme $\|.\|$. Comme les fonctions φ_m sont continues sur $[0,1]$, il faut que les fonctions φ_m appartiennent à l'adhérence de V pour la norme $\|.\|$ (quel que soit $m \in \mathbb{N}$).
Cette condition nécessaire vaut tant pour la norme $\|.\| = \|.\|_\infty$ que pour la norme $\|.\| = \|.\|_2$.
Réciproquement, supposons que φ_m appartienne à $\overline{V}^\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Par 12., l'adhérence de V est stable par combinaison linéaire, donc toute fonction polynomiale sur $[0,1]$ appartient à $\overline{V}^\infty$.
D'après le théorème de Weierstrass, toute fonction f continue sur $[0,1]$ est limite pour la norme $\|.\|_\infty$ d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales.
Comme $\overline{V}^\infty$ est fermée (12.), la limite f de la suite convergente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient encore à $\overline{V}^\infty$.
Ainsi, V est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $\|.\|_\infty$.

15. La nécessité de cette condition a été justifiée à la question précédente.
Par 14., cette condition est suffisante pour que V soit dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $\|.\|_\infty$. Par 11.,

$$\mathcal{C}([0,1]) = \overline{V}^\infty \subset \overline{V}^2 \subset \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$$

donc V est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $\|.\|_2$.

Partie E. Un critère de densité pour la norme $\|.\|_2$

16. La norme $\|.\|_2$ est associée au produit scalaire

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

si bien qu'on peut appliquer les résultats de la partie C avec $\|f\| = \|f\|_2$.
Les sous-espaces vectoriels W_n forment une suite croissante de parties de $\mathcal{C}([0,1])$ telles que

$$W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n.$$

Par 5.,

$$\forall \mu \in \mathbb{N}, \quad d(\varphi_\mu, W) = \lim_{n\to\infty} d(\varphi_\mu, W_n)$$

et par 4.,

$$\forall \mu \in \mathbb{N},\quad d(\varphi_\mu, W) = 0 \Leftrightarrow \varphi_\mu \in \overline{W}^2.$$

Enfin, par 15., le sous-espace W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $\|.\|_2$ si, et seulement si, $\varphi_\mu \in \overline{W}^2$ pour tout $\mu \in \mathbb{N}$.
Ainsi, le sous-espace W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour $\|.\|_2$ si, et seulement si,

$$\forall \mu \in \mathbb{N},\quad \lim_{n\to\infty} d(\varphi_\mu, W_n) = 0$$

17. En tant que famille extraite d'une famille libre (1.), la famille $(\varphi_{\lambda_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre et, d'après 10.,

$$d(\varphi_\mu, Wn) = \sqrt{\frac{G(\varphi_{\lambda_1}, \dots, \varphi_{\lambda_n}, \varphi_\mu)}{G(\varphi_{\lambda_1}, \dots, \varphi_{\lambda_n})}}$$

et

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+,\quad (\varphi_a|\varphi_b) = \int_0^1 t^a t^b dt = \frac{1}{a+b+1}.$$

Les déterminants de Gram à calculer sont donc des déterminants de Cauchy avec

$$\forall 1 \leq i \leq n,\quad a_i = b_i = \lambda_i + \frac{1}{2}.$$

En appliquant avec $a_n = b_n = \mu + \frac{1}{2}$ (et en décalant d'un cran les indices) la formule de récurrence entre D_n et D_{n-1} établie au 3., on obtient

$$\frac{G(\varphi_{\lambda_1}, \dots, \varphi_{\lambda_n}, \varphi_\mu)}{G(\varphi_{\lambda_1}, \dots, \varphi_{\lambda_n})} = \frac{1}{(2\mu+1)} \prod_{k=1}^{n} \frac{(\mu - \lambda_k)^2}{(\lambda_k + \mu + 1)^2}.$$

En prenant la racine carrée, on la formule demandée.

18. Il est clair que : si $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, alors la suite

$$\left(\frac{|\mu - \lambda_k|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

tend vers 1 (limite à l'infini d'une fonction rationnelle).
• La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ (en tant que fonction rationnelle dont le dénominateur ne sannule pas) et strictement décroissante (le numérateur est strictement décroissant, le dénominateur est strictement croissant et strictement positif). De plus, elle est nulle en $x = \mu$ et tend vers -1 au voisinage de $+\infty$.
Par suite, la fonction $|f|$ réalise une bijection de $[0, \mu]$ sur $\left[0, \dfrac{\mu}{\mu+1}\right]$ et une bijection de $[\mu, +\infty[$ sur $[0, 1[$. La réciproque de cette seconde bijection, que nous noterons g, tend vers $+\infty$ au voisinage de 1.
• Si la suite $(|f(\lambda_k)|)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1, alors il existe un rang n_0 tel que

$$\forall k \geq n_0,\quad \frac{\mu}{\mu+1} \leq |f(\lambda_k)| < 1$$

et d'après l'étude précédente de f

$$\forall k \geq n_0,\quad \lambda_k \geq \mu$$

donc

$$\forall k \geq n_0,\quad \lambda_k = g(|f(\lambda_k)|).$$

Comme g tend vers $+\infty$ au voisinage de 1, on déduit du théorème de composition des limites que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

19. D'après l'étude de f au 18., la quantité $d(\varphi_\mu, W_n)$ est un produit de réels compris entre 0 (inclus) et 1 (exclus). Par conséquent, c'est une expression positive et décroissante en fonction de n : cette quantité admet une limite positive et nous cherchons maintenant si cette limite est nulle ou strictement positive.
• Si un entier μ est l'un des λ_k, alors φ_μ appartient à W et donc à l'adhérence de W. Dans tout ce qui suite, on suppose que l'entier μ n'est pas un terme de la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Premier cas : Supposons que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers $+\infty$. Dans ce cas, il existe $0 < r < 1$ et une suite extraite $(\lambda_{\psi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{|\lambda_{\psi(k)} - \mu|}{\lambda_{\psi(k)} + \mu + 1} \leq r.$$

Par conséquent, puisque tous les facteurs sont compris entre 0 et 1,

$$0 \leq \prod_{k=0}^{\psi(n)} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \leq \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_{\psi(k)} - \mu|}{\lambda_{\psi(k)} + \mu + 1} \leq r^{n+1}.$$

et $d(\varphi_\mu, W_n)$ tend vers 0 (puisque cette suite convergente admet une suite extraite de limite nulle).
Dans ce cas, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_k}$ est grossièrement divergente.

Deuxième cas : Supposons que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$. La distance $d(\varphi_\mu, W_n)$ tend vers 0 si, et seulement si, son logarithme tend vers $-\infty$, ce qui revient à dire que la série de terme général négatif

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1}\right)$$

est divergente. Comme il s'agit d'une série dont le terme général est de signe constant, il suffit de calculer un équivalent du terme général pour caractériser la nature de cette série. Comme $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, on peut supposer que k est assez grand pour que $\lambda_k > \mu$ et donc que

$$\ln\left(\frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1}\right) = \ln\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{\mu + 1}{\lambda_k}\right) \sim -\frac{2\mu + 1}{\lambda_k}.$$

Par conséquent, les séries $\sum_{k\in\mathbb{N}} \ln\left(\frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1}\right)$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_k}$ sont de même nature.

Conclusion : Par 16., 17. et 18., l'espace W est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$ pour la norme $\|.\|_2$ si, et seulement si, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

• • • • • • • • • • •