Devoir libre n°3
Correction

Exercice 1

1. On peut vérifier facilement que l'application Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; c'est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n^2}$ (on confond une matrice carrée de taille n à un vecteur de $\mathbb{R}^{n^2}$).
2. Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, on a $\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)} = \sqrt{\mathrm{tr}(I_n)} = \sqrt{n}$, ce qui montre que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans la boule de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$. En particulier $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné.
Il s'agit d'une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est finie, un compact est un fermé borné.
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ convergeant vers un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La suite de terme général ${}^tA_pA_p$ est constante égale à I_n, donc $\lim\limits_{p\to\infty}({}^tA_pA_p) = I_n$. Par ailleurs, ${}^tA_pA_p$ tend vers ${}^tAA$, car l'application $(A,B) \mapsto {}^tAB$ est bilinéaire donc continue. Par unicité de la limite il vient ${}^tAA = I_n$, c'est-à-dire $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé.
3. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose
$$M = \frac{A + {}^tA}{2} \text{ et } N = \frac{A - {}^tA}{2}.$$
On vérifie facilement que M est symétrique, que N est antisymétrique et que $A = M + N$. De plus la seule matrice qui est symétrique et antisymétrique est la matrice nulle.
D'autre part, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors
$$\Phi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{tr}({}^tBA) = -\mathrm{tr}(BA) = -\Phi(A,B),$$
donc $\Phi(A,B) = 0$.
En conclusion, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux (pour le produit scalaire Φ) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2

1. On vérifie facilement que
$$A^n = \begin{cases} I_3 & \text{si } n \equiv 0[3] \\ A & \text{si } n \equiv 1[3] \\ A^2 & \text{si } n \equiv 2[3] \end{cases}$$
On remarque que $\|A^n\| = 1$ où $\|.\|$ désigne la norme définie par : $\forall A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 3}$, $\|A\| = \max\limits_{1\le i,j\le 3} |a_{ij}|$. Donc la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Notons $F = \ker(A - I_3)$ et $G = \mathrm{Im}(A - I_3)$ et vérifions que $R^3 = F \oplus G$. D'après le théorème du rang il suffit de vérifier que $F \cap G = \{0\}$.
Soit $x \in F \cap G$, c'est-à-dire $x = Ax$ et il existe $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = Ay - y$. On obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x = A^n x$ et $A^n x = A^{n+1}y - A^n y$, donc $x = C_n x = \dfrac{A^{n+1}y - y}{n+1}$
Or
$$\|\frac{A^{n+1}y - y}{n+1}\| \le \frac{\|A\|^{n+1} + 1}{n+1}\|y\| \le \frac{2\|y\|}{n+1},$$
donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x\| = \|C_n x\| \le \dfrac{2\|y\|}{n+1}$, on en déduit $\|x\| = 0$ ou encore $x = 0$. Ainsi $F \cap G = \{0\}$ et donc $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
D'après ce qui précède on a $C_n x = x$ pour tout $x \in F$ et si $x' = Ay - y \in G$, $\lim\limits_{n\to\infty} C_n x = \dfrac{A^{n+1}y - y}{n+1} = 0$.
Soit P la matrice de projection sur F parallèlement à G. Montrons donc que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers P dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Comme $R^3 = F \oplus G$ et que G est stable par $A - I_3$, alors $A - I_3$ induit un isomorphisme de G, notons le $\triangle$.
Soit $z = x + x' \in \mathbb{R}^3 = F \oplus G$, il existe un unique $y \in G$ tel que $x' = Ay - y$, donc $y = \triangle^{-1}x'$. On a :
$$\|C_n z - Pz\| = \|C_n x'\| \le \frac{2\|y\|}{n+1} = \frac{2\|\triangle^{-1}x'\|}{n+1} \le \frac{2\|\triangle^{-1}\|}{n+1}\|x'\| \le \frac{2\|\triangle^{-1}\|\|I_3 - A\|}{n+1}\|z\|$$
car $x' = (I_3 - A)(z)$.
Ainsi $|||C_n - P||| = \sup\limits_{z\neq 0} \dfrac{\|C_n z - Pz\|}{\|z\|} \le \dfrac{2\|\triangle^{-1}\|}{n+1}\|x'\| \le \dfrac{2\|\triangle^{-1}\|\|A - I_3\|}{n+1}$, et donc $\lim\limits_{n\to\infty} |||C_n - P||| = 0$.

Exercice 3

1. Supposons que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ il vient alors, pour $n \geq 1$,

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt = \left[f(t)\frac{e^{int}}{in}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{e^{int}}{in}dt.$$

D'où

$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| \leq \frac{|f(b)|+|f(a)|}{n} + \int_a^b \frac{|f'(t)|}{n}dt,$$

ou encore

$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n} + (b-a)\frac{\|f'\|_\infty}{n},$$

et donc $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$.

2. (a) Dire que les fonctions affines par intervalles forment une partie dense de E, signifie que pour toute fonction $f \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe ϕ affine par intervalle sur $[a,b]$ telle que $\|f-\phi\|_\infty \leq \varepsilon$. Comme f est continue sur le compact $[a,b]$ elle y est aussi uniformément continue (théorème de Heine).
Soit donc $\varepsilon > 0$: Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout couple $(x,x') \in [a,b]^2$

$$|x-x'| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(x')| \leq \varepsilon$$

On définit donc une subdivision $t_0 = a < t_1 < ... < t_p = b$ telle que $\max|t_{i+1}-t_i| \leq \alpha$ et on lui associe une fonction ϕ affine sur chaque $[t_i, t_{i+1}]$ telle que $\phi(t_i) = f(t_i)$ pour tout i.
Soit alors $x \in [a,b]$ il existe un indice i et un réel $s \in [0,1]$ tels que $x = st_i + (1-s)t_{i+1} \in [t_i, t_{i+1}]$ et ainsi

$$|f(x)-\phi(x)| = |s(f(x)-\phi(t_i)) + (1-s)(f(x)-\phi(t_{i+1})| \leq (s+(1-s))\varepsilon = \varepsilon,$$

et donc $\|f-\phi|_\infty \leq \varepsilon$.

(b) Soit f affine par intervalles sur $[a,b]$ attachée à une subdivision $t_0 = a < t_1 < ... < t_p = b$

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt = \sum_{i=0}^{p-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)e^{int}dt.$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)e^{int}dt = \sum_{i=0}^{p-1}\lim_{n\to\infty}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)e^{int}dt.$$

(en effet, la restriction de f à chaque $[t_i, t_{i+1}]$ est de classe $\mathcal{C}^1$).

(c) On considère $\varepsilon > 0$, il existe ϕ affine par intervalle telle que $\|f-\phi\|_\infty \leq \varepsilon$. Nous avons alors pour tout entier n ;

$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt - \int_a^b \phi(t)e^{int}dt\right| \leq \int_a^b |f(t)-\phi(t)|dt \leq (b-a)\|f-\phi\|_\infty \leq (b-a)\varepsilon$$

d'où

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \left|\int_a^b |\phi(t)dt\right| + (b-a)\varepsilon$$

Ceci étant, nous pouvons choisir N_ε de telle sorte que pour $n \geq N_\varepsilon$

$$\left|\int_a^b \phi(t)e^{int}dt\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, il existe un rang à partir N_ε duquel

$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| \leq (1+(b-a))\varepsilon.$$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(t)e^{int}dt = 0$.

• • • • • • • • • • •