Devoir libre n°4

Correction

Exercice : 1

1. Considérons la fonction $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $g(A) = A^2$. On a g est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$dg_A(H) = AH + HA.$$

D'où f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $\forall (A, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$:

$$df_A(H) = H - \frac{1}{2}(AH + HA).$$

2. Soit $A \in \mathcal{B} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \|I - A\| \leq \frac{1}{2}\right\}$. D'après la question 1., on a pour tout $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$df_A(H) = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}H - \frac{1}{2}AH - \frac{1}{2}HA = \frac{1}{2}(I - A)H + \frac{1}{2}H(I - A)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|df_A(H)\| &\leq \frac{1}{2}\|(I - A)H\| + \frac{1}{2}\|H(I - A)\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|I - A\|.\|H\| + \frac{1}{2}\|H\|.\|I - A)\| \\
&\leq \|I - A\|.\|H\| \leq \frac{1}{2}\|H\|.
\end{aligned}$$

Ceci nous donne que $\forall A \in \mathcal{B}$, on a $|||df_A||| = \sup_{H \neq 0} \frac{\|df_A(H)\|}{\|H\|} \leq \frac{1}{2}$. $\mathcal{B}$ étant convexe, on obtient d'après le théorème des accroissements finis que :

$$\forall X, Y \in \mathcal{B}, \quad \|f(X) - f(Y)\| \leq \frac{1}{2}\|X - Y\|.$$

3. On suppose que $B \in \mathcal{B}$. On a $\forall A \in \mathcal{B}$ on a :

$$\|f(A) - I\| \leq \|f(A) - f(I)\| + \|f(I) - I\|$$

avec $\|f(A) - f(I)\| \leq \frac{1}{2}\|A - I\| \leq \frac{1}{4}$ et $\|f(I) - I\| = \frac{1}{2}\|I - B\| \leq \frac{1}{4}$. D'où $\|f(A) - I\| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $f(A) \in \mathcal{B}$. Ceci nous donne que $f(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. $f : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ est une application contractante. $\mathcal{B}$ est fermé, donc $\mathcal{B}$ est complet. Le théorème du point fixe nous donne : Il existe une seule matrice $A \in \mathcal{B}$ telle que $f(A) = A - \frac{1}{2}(A^2 - B) = A$, donc $A^2 = B$. De plus si $X \in \mathcal{B}$ et $X^2 = B$ on a $f(X) = X$ et par unicité $X = A$.

$|||u|||$

Exercice : 2

1. Les fonctions coordonnées de f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et sa matrice jacobienne est donnée par :

$$J_{(x,y)}(f) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(y) \\ x & \cos(y) \end{pmatrix}.$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|(x, y)\| \leq \frac{1}{4}$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$(I - df_{(x,y)})(h, k) = \left(I_2 - J_{(x,y)}(f)\right)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \cos(x))h - \sin(y)k \\ -xh + (1 - \cos(x))k \end{pmatrix}.$$

D'autre part, en utilsant les inégalités $|\sin(x)| \leq |x|$ et $1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$, on a :

$$|(1 - \cos(x))h - \sin(y)k| \leq \frac{x^2}{2}|h| + |y||k| \leq \frac{1}{32}|h| + \frac{1}{4}|k| \leq \frac{9}{32}\|(h, k)\| \leq \frac{1}{2}\|(h, k)\|$$

et

$$|-xh+(1-\cos(x))k| \leq |x||h| + \frac{x^2}{2}|k| \leq \frac{1}{4}|h| + \frac{1}{32}|k| \leq \frac{1}{2}\|(h,k)\|.$$

Ainsi,

$$\|(I-df_{(x,y)})(h,k)\| \leq \frac{1}{2}\|(h,k)\|.$$

Ceci nous donne que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\|(x,y)\|\leq\frac{1}{4}$, on a

$$|||I-df_{(x,y)}||| = \sup_{(h,k)\neq 0}\frac{\|(I-df_{(x,y)})(h,k)\|}{\|(h,k)\|} \leq \frac{1}{2}.$$

3. (a) Il est clair que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et que $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\|(x,y)\|\leq\frac{1}{4}$, on a $|||dg_{(x,y)}|||\leq\frac{1}{2}$. $\mathcal{K}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\|(x,y)\|\leq\frac{1}{4}\right\}$ étant convexe, on obtient d'après le théorème des accroissements finis que :

$$\forall X,Y\in\mathcal{K},\quad \|g(X)-g(Y)\|\leq\frac{1}{2}\|X-Y\|.$$

Montrons que si $\|X\|\leq\frac{1}{4}$, on a $\|g(X)\|\leq\frac{1}{4}$. On a

$$\|g(X)-g(0)\|\leq\frac{1}{2}\|X\|.$$

Donc

$$\|g(X)\|\leq\frac{1}{2}\|X\|+\|g(0)\|\leq\frac{1}{8}+\|g(0)\|$$

avec $g(0)=A$ et $\|A\|\leq\frac{1}{8}$ par hypothèse, d'où $\|g(X)\|\leq\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\leq\frac{1}{4}$.

(b) $\mathcal{K}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$, donc complet. D'après 3 (a) on a g est une fonction contractante de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$:

$$\forall X,Y\in\mathcal{K},\quad \|g(X)-g(Y)\|\leq\frac{1}{2}\|X-Y\|.$$

Le théorème du point fixe nous donne qu'il existe un unique $X_0=(x_0,y_0)\in\mathcal{K}$ tel que $g(X_0)=X_0$, c'est-à-dire $X_0=X_0-(f(X_0)-A)$ ou encore $f(X_0)=A$. Ceci est équivalent à

$$\begin{cases} 1-\cos y_0+\sin x_0 = a \\ \dfrac{x_0^2}{2}+\sin y_0 = b \end{cases}$$

et $\|(x_0,y_0)\|\leq\frac{1}{4}$, donc $|x_0|\leq\frac{1}{4}$ et $|y_0|\leq\frac{1}{4}$.

Réciproquement, si (x',y') est solution du système précédent avec $|x'|\leq\frac{1}{4}$ et $|y'|\leq\frac{1}{4}$, on obtient $\|(x',y')\|\leq\frac{1}{4}$ et $f(x',y')=(a,b)$, donc $(x',y')\in\mathcal{K}$ et on a $g(x',y')=(x',y')$. Donc (x',y') est un point fixe de g dans $\mathcal{K}$ et par unicité on obtient $(x',y')=(x_0,y_0)$.

Exercice : 3

1. $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ comme quotient d'une fonction polynôme, donc $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, par la composée d'une fonction polynôme strictement positive avec la fonction racine $\sqrt{.}$, qui est $\mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[)$. Puis on a

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1+y^2+xy-x}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{1+x^2+xy+y}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. (a) L'égalité $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0) = 0$ nous donne $(y_0^2 - x_0^2) - (y_0 + x_0) = 0$.

(b) Si (x_0, y_0) est un point critique, alors il vérifie $(y_0 + x_0)(y_0 - x_0 - 1) = 0$, donc $y_0 = -x_0$ ou $y_0 = x_0 + 1$. Le second cas est impossible, car il ne permet pas d'annuler les dérivées partielles. Le premier cas donne $x_0 = 1$ et $y_0 = -1$. Il y a donc un seul point critique.

3. (a) Les dérivées partielles secondes de f en $(1, -1)$ sont données par :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = -2 \times 3^{\frac{-3}{2}}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-1) = -3^{\frac{-3}{2}}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) = -2 \times 3^{\frac{-3}{2}}.$$

D'où

$$H(1,-1) = \begin{pmatrix} -2 \times 3^{\frac{-3}{2}} & -3^{\frac{-3}{2}} \\ -3^{\frac{-3}{2}} & -2 \times 3^{\frac{-3}{2}} \end{pmatrix}$$

(b) $s^2 - rt$ vaut $-\frac{1}{9} < 0$, et r strictement négative. Il s'agit donc d'un maximum local de f.

●●●●●●●●●●●