Devoir libre n°5
Correction

Exercice : 1

1. (i) u est de rang 1 donc $\mathrm{Im} u \cap \ker u$ est un sous-espace vectoriel de dimension 0 ou 1.

- Si $\dim \mathrm{Im} u \cap \ker u = 0$, alors $\mathrm{Im} u \cap \ker u = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, on a $E = \mathrm{Im} u \oplus \ker u$.
- Si $\dim \mathrm{Im} u \cap \ker u = 1$, alors $\mathrm{Im} u \cap \ker u = \mathrm{Im} u$ et on a $\mathrm{Im} u \subset \ker u$.

(ii) Le vecteur e est non nul, donc (e) est une famille libre de l'espace vectoriel de dimension finie E. On peut la compléter en une base de E par le théorème de la base incomplète.
$e \in \ker u$, donc dans une telle base, la première colonne de la matrice de u sera nulle. et toutes les autres colonnes seront dans $\mathrm{Im} u$ donc colinéaires à e d'où une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La trace de cette matrice est nulle donc dans le cas où $\mathrm{Im} u \subset \ker u$ on a bien $\mathrm{tr}\, u = 0$.

(iii) u est de rang 1 donc 0 est valeur propre de u et $E_0 = \ker u$ est de dimension $n-1$.
a) $\Rightarrow$ b) u est diagonalisable et $\dim E_0 = n-1$ donc il existe une seconde valeur propre a avec $\dim E_a = 1$.
Dans une base adaptée à la somme directe $E = E_a \oplus E_0$ la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque sur la matrice que $\mathrm{Im} u = E_a$. On a donc bien $E = \mathrm{Im} u \oplus \ker u$
b) $\Rightarrow$ c) et a)
$\mathrm{Im} u$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, soit e un vecteur générateur de $\mathrm{Im} u$. $u(e) \in \mathrm{Im} u$ donc $u(e)$ est colinéaire à e : il existe un réel a tel que $u(e) = a.e$, de plus, comme $\mathrm{Im} u$ et $\ker u$ sont en somme directe, $e \notin \ker u$ et $a \neq 0$. Dans une base adaptée à la somme directe $E = \mathrm{Im} u \oplus \ker u$ la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $\mathrm{tr}\, u = a \neq 0$ et u diagonalisable
c) $\Rightarrow$ b) On suppose que $\mathrm{tr}(u) \neq 0$. De la question (ii), on déduit que $\mathrm{Im} u \not\subset \ker u$ puis de la question (i), on déduit $E = \mathrm{Im} u \oplus \ker u$

2. (i) F_A est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ et $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$F_A(X + \lambda Y) = F_A(X) + \lambda F_A(Y).$$

(linéarité de la trace et bilinéarité du produit matriciel.)
F_A est donc une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

(ii) $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$, on a :
$$F_{A+\lambda B} = F_A + \lambda F_B.$$
F est donc une application linéaire

(iii) AE_{ij} est la matrice dont la jème colonne est égale à la ième colonne de A et dont toutes les autres colonnes sont nulles. Sa trace est donc égale à a_{ji} :
$$F_A(E_{ij}) = a_{ji}.$$
Si F_A est nulle, alors, pour tout (i,j), $a_{ji} = F_A(E_{ij}) = 0$. La matrice A est donc nulle, on en déduit que F est injective

(iv) F est une application linéaire injective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ et $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^* = n^2$. F est donc un isomorphisme

3. (i) F est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$ et $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^*$. Il existe donc une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que
$$f = F_A$$
c'est à dire $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
$$f(X) = \operatorname{tr}(AX).$$

(ii) $\psi_f(X) = 0$ si, et seulement si, $f(X)J = 0$ si, et seulement si, $f(X) = 0$ (car $J \neq 0$), donc
$$\ker \psi_f = \ker f.$$
f est une forme linéaire non nulle et $J \neq 0$, donc l'image de ψ_f est le sous-espace-vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ enjendré par J. le rang de ϕ_f est égal à 1

(iii) $\psi_f(J) = f(J)J = \operatorname{tr}(AJ)J$.
• Si $\operatorname{tr}(AJ) = 0$, alors $\psi_f(J) = 0$ et $\operatorname{Im}\psi_f \subset \ker \psi_f$ et d'après la question 1.(ii), $\operatorname{tr}(\psi_f) = 0 = \operatorname{tr}(AJ)$.
• Si $\operatorname{tr}(AJ) \neq 0$, alors $\psi_f(J) = \operatorname{tr}(AJ)J$ et d'après le calcul fait dans la question 1.(iii), $\operatorname{tr}(\psi_f) = \operatorname{tr}(AJ)$.
Dans les deux cas, on a :
$$\operatorname{tr}(\psi_f) = \operatorname{tr}(AJ).$$

(iv) De la question 1.(iii), on déduit que ψ_f est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(AJ) \neq 0$

(v) Dans le cas où ψ_f est diagonalisable, ses valeurs propres sont 0 et $\operatorname{tr}(AJ)$ ($\operatorname{tr}(AJ) \neq 0$). Le polynôme minimal de ψ_f est donc
$$\pi_{\psi_f}(X) = X(X - \operatorname{tr}(AJ)).$$

Exercice : 2

1. Le vecteur $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ vérifie $AV = V$. Donc 1 est bien valeur propre de A, et V est un vecteur propre associé.

2. Posons $u(x) = (y_1, y_2, ..., y_n)$. On a :
$$|y_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \leq \|x\| \sum_{j=0}^{n} a_{ij} = \|x\|,$$
donc $\|u(x)\| \leq \|x\|$.

3. Soit $\lambda \in Sp(u)$ et soit x un vecteur propre associé non nul, on a donc :

$$\|u(x)\| = |\lambda|\|x\| \leq \|x\|.$$

Par conséquent, $|\lambda| \leq 1$.

4. On a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |z_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Pour que $\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i\right| = 1$, il faut et il suffit que l'on ait les deux égalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i |z_i| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad (1)$$

et

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i\right| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |z_i| \quad (2)$$

L'égalité (1) s'écrit $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(1-|z_i|) = 0$ ce qui équivalent à $|z_i| = 1$ pour tous les indices $i \in I = \{\alpha_i / \alpha_i \neq 0\}$.
D'après le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, l'égalité (2) montre que les complexes $\alpha_i z_i$ non nuls sont tous sur une même demi-droite d'origine 0.
Finalement, les égalités (1) et (2) sont vraies si, et seulement si, tous les complexes z_i pour $i \in I$ sont égaux et de module 1.

5. Puisque le vecteur x est non nul, il est de même de $x_k = \|x\|$. L'égalité $u(x) = \lambda x$ donne :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} \frac{x_i}{x_k} = \lambda.$$

Puisque $|\lambda| = 1$, le résultat de la question précédente s'applique : Pour $i \in J = \{a_{ki}/a_{ki} \neq 0\}$, on a $a_{ki}\left|\frac{x_i}{x_k}\right| = a_{ki}$, c'est-à-dire, $|x_i| = |x_k|$.
On obtient donc l'existence d'un réel θ tel que, pour tout $i \in J$, $x_i = e^{i\theta} x_k$. En remplaçant dans la relation de départ, on obtient

$$\lambda = e^{i\theta} \sum_{i \in J} a_{ki} = e^{i\theta} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} = e^{i\theta}.$$

Ainsi, $e^{i\theta} = \lambda$ et $x_i = \lambda x_k$ pour tout indice $i \in J$. Il en résulte que $a_{kk} \neq 0$, sinon on aura $\lambda = 1$.
On en déduit donc en particulier que si x_k est une composante de x de module maximal, λx_k est encore une composante de x de module maximal. De là, la suite $(\lambda^i x_k)_{i \in \mathbb{N}}$ est stationnaire (les complexes $x_k, \lambda x_k, \lambda^2 x_k, ..., \lambda^m x_k, ...$ sont tous des composantes de x de module maximal). Il existe donc $r < s$ tels que $\lambda^r x_k = \lambda^s x_k$ et comme $x_k \neq 0$, on a $\lambda^q = 1$ avec $q = s - r$.

6. D'après la question précédente, on a vu que l'existence d'une valeur propre λ telle que $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$ implique $a_{kk} = 0$. Par conséquent si tous les coefficients de A sont strictement positifs, 1 est la seule valeur propre de u de module 1.
D'autre part, tous les nombres $\frac{x_i}{x_k}$ sont égaux à $\frac{x_k}{x_k} = 1$. Donc tous les vecteurs propres associés à 1 sont colinéaires à $(1, 1, ..., 1)$. Donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.

• • • • • • • • • • •