Devoir libre n°6
Correction

## Exercice : 1

**1.** Soit $x \in E$. On a $s_u(x) - x \in \mathbb{R}u$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $s_u(x) - x = \alpha u$. La condition $(s_u(x)|x) = 0$ entraîne que $\alpha = -2\dfrac{(x|u)}{\|u\|^2}$. D'où $s_u(x) = x - 2\dfrac{(x|u)}{\|u\|^2}u$.

**2.** (a) Supposons $\mathrm{Sp}(\rho_{u,v}) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\rho_{u,v})$, alors il existe $x \in E \backslash \{0\}$ tel que $\rho_{u,v}(x) = x - (v|x)u = \lambda x$, et par conséquent $(\lambda - 1 + (u|v))(v|x) = 0$.
• Si $\lambda \neq 1 - (u|v)$, alors $(v|x) = 0$ et dans ce cas on a $\rho_{u,v}(x) = x$, c'est-à-dire 1 est une valeur propre et $E_1 = \{x \in E/(v|x) = 0\}$, c'est un hyperplan, donc 1 est une valeur propre d'ordre au moins $n - 1$.
• Si $\lambda = 1 - (u|v)$, alors puisque on a $\rho_{u,v}(u) = (1 - (v|u))u$, $1 - (u|v)$ est une valeur propre d'ordre au moins 1 si $(u|v) \neq 0$ et dans ce cas $E_{1-(u|v)} = \mathrm{Vect}(u)$.
D'aprés l'étude précédente $\rho_{u,v}$ est diagonalisable si et seulement si $(u|v) \neq 0$.

(b) On a, d'après ce qui précède, $\det(\rho_{u,v}) = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\rho_{u,v})} \lambda = 1 - (u|v)$. Donc $\rho_{u,v}$ est inversible si et seulement si $1 \neq (u|v)$.
Posons pour $x$ de $E$, $y = \rho_{u,v}^{-1}(x)$.

$$y = \rho_{u,v}^{-1}(x) \Leftrightarrow x = y - (v|y)u.$$

Donc il existe $\alpha$ : $y = x + \alpha u$ en remplaçant, on trouve $\alpha = \dfrac{(v|x)}{1-(u|v)}$, d'où $\rho_{u,v}^{-1}(x) = x + \dfrac{(v|x)}{1-(u|v)}u$.

**3.** (a) On note par $\rho_{u,v}^*$ l'adjoint de $\rho_{u,v}$, il est caractérisé par :

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad (\rho_{u,v}(x)|y) = (x|\rho_{u,v}^*(y)).$$

Comme

$$(x - (v|x)u|y) = (x|y) - (v|x)(u|y) = (x|y - (u|y)v),$$

donc par unicité :

$$\rho_{u,v}^*(y) = y - (u|y)v.$$

(b) $\rho_{u,v} \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si pour tout $(x,y) \in E^2$ $(\rho_{u,v}(x)|\rho_{u,v}(y)) = (x|y)$, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in E,\ (x - (v|x)u|y - (v|y)u) = (x|y)\ \ (x|y) - (v|y)(x|u) - (v|x)(u|y) + (v|x)(v|y)(u|u) = (x|y)$$

En particulier, si $x = y = u$, on obtient $-2 + (u|v) = 0$, donc il suffit de prendre $v = \dfrac{2}{(u|u)}u$, que l'on notera $\hat{u}$.

(c) Il est clair que $\rho_{u,\hat{u}} = s_u$.

## Exercice : 2

**1.** D'une part, il est clair que si $u$ est antisymétrique, alors $(u(x)|x) = -(x|u(x)) = -(u(x)|x)$ et donc $(u(x)|x) = 0$ pour tout $x \in E$.
Réciproquement, supposons que $(u(x)|x) = 0$ pour tout $x \in E$ et considérons $x, y \in E$. Alors on a

$$(u(x+y)|x+y) = 0$$

et aussi

$$\begin{aligned}(u(x+y), x+y) &= (u(x)|x) + (u(x)|y) + (u(y)|x) + (u(y)|y)\\ &= (u(x)|y) + (u(y)|x)\end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$(u(x)|y) = -(u(y)|x)$$

et donc que $u$ est antisymétrique.

**2.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $E$ et soit $A$ la matrice de $u$ dans cette base. Alors on a $a_{i,j} = (u(e_j)|e_i)$ pour tous $i, j$. Supposons désormais que $u$ est antisymétrique. Alors pour tout couple $(i, j)$, on a

$$a_{i,j} = (u(e_j)|e_i) = -(u(e_i)|e_j) = -a_{j,i}$$

et la matrice $A$ est bien antisymétrique.

Réciproquement, supposons que $A$ est antisymétrique, et prouvons que $u$ est bien antisymétrique. On sait que l'on a $(u(e_j)|e_i) = -(u(e_i)|e_j)$. Fixons maintenant $x, y \in E$ et écrivons les $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. On a alors

$$\begin{aligned}
(u(x)|y) &= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j u(e_j) | \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_j y_i (u(e_j)|e_i) \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} x_j y_i (e_j|u(e_i)) \\
&= -\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j | \sum_{i=1}^{n} y_i u(e_i)\right) \\
&= -(x|u(y))
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que $u$ est antisymétrique.

**3.** Pour démontrer que $\mathrm{Im}(u) = (\ker u)^{\perp}$, il suffit de démontrer que $\mathrm{Im}(u) \subset (\ker u)^{\perp}$, puis de remarquer que ces deux sous-espaces ont la même dimension, qui vaut $\dim(E) - \dim(\ker(u))$. Prenons donc $y \in \mathrm{Im}(u)$, que l'on écrit $y = u(x)$ et soit $z \in \ker(u)$. Alors on a

$$(y|z) = (u(x)|z) = -(x|u(z)) = 0$$

et donc on a bien $y \in (\ker u)^{\perp}$.

**4.** Soit $x \in F$ et $y \in F^{\perp}$. Alors on a

$$(u(y)|x) = -(y|u(x)) = 0$$

puisque $y \in F^{\perp}$ et $u(x) \in u(F) \subset F$.

**5.** On a toujours $\ker(u) \subset \ker(u^2)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(u^2)$. Alors

$$\|u(x)\|^2 = (u(x)|u(x)) = -(x|u^2(x)) = 0$$

et donc $x \in \ker(u)$.

**6.** Si le spectre de $u$ n'est pas vide, soit $\lambda$ une valeur propre de $u$ et $x$ un vecteur propre (non-nul) associé. Alors

$$(u(x)|x) = 0$$

alors que l'on a aussi

$$(u(x)|x) = \lambda \|x\|^2$$

et donc $\lambda = 0$.

**7.** Il est facile de prouver que $u^2$ est diagonalisable, car en effet, $u^2$ est un endomorphisme symétrique : pour tous $x, y \in E$,

$$(u^2(x)|y) = -(u(x)|u(y)) = (x|u^2(y)).$$

Soit maintenant $\lambda$ une valeur propre de $u^2$, de vecteur propre associé $x$. Comme ci-dessus, on a

$$(u^2(x)|x) = \lambda\|x\|^2.$$

D'autre part,

$$(u^2(x)|x) = -(u(x)|u(x)) = -\|u(x)\|^2,$$

ce qui prouve bien que $\lambda \leq 0$.

**8.** On va procéder par récurrence sur la dimension de $F$. Remarquons déjà que la dimension de $F$ ne peut pas être égale à 1. En effet, en dimension 1, un endomorphisme antisymétrique ne peut être que nul (regarder par exemple la matrice). Supposons donc que $F$ soit de dimension 2. Soit $e_1$ un vecteur unitaire de $F$, et soit $e_2 = \frac{1}{\alpha}v(e_1)$. On a alors

$$v(e_2) = \frac{1}{\alpha}v^2(e_1) = -\alpha e_1.$$

Ainsi, la matrice de $v$ dans la base $(e_1, e_2)$ est bien $J(\alpha)$. Reste à voir que $(e_1, e_2)$ est une base orthonormée. On a en effet

$$(e_1|e_2) = \frac{1}{\alpha}(e_1|v(e_1)) = -\frac{1}{\alpha}(v(e_1)|e_1) = -(e_2|e_1)$$

et donc $(e_1|e_2) = 0$. D'autre part,

$$\|e_2\|^2 = \frac{1}{\alpha^2}(v(e_1)|v(e_1)) = \frac{-1}{\alpha^2}(e_1|v^2(e_1)) = \|e_1\|^2 = 1.$$

Supposons désormais le résultat démontré pour toute dimension inférieure ou égale à $p-1$ et démontrons-le en dimension $p$. Soit $(e_1, e_2)$ une famille orthonormale de $F$ définie comme dans le cas de la dimension 2. Posons $G = \text{vect}(e_1, e_2)^{\perp}$, qui est stable par $v$, et $v_{|G}$ est un endomorphisme antisymétrique de $G$. Par l'hypothèse de récurrence, on peut trouver une base orthonormale $(e_3, \dots, e_p)$ de $G$ telle que la matrice de $v_{|G}$ ait la bonne forme. La matrice de $v$ dans la base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de $v$ a alors la forme voulue.

**9.** Notons $-\alpha_1^2, \dots, -\alpha_r^2$ les valeurs propres non-nulles de $u^2$, et $E_i$ les espaces propres associés. On sait que

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r \oplus \ker(u^2)$$

et la somme est orthogonale. On réduit ensuite $u$ dans chaque sous-espace propre de $u^2$ en utilisant la question précédente, et puisque $\ker(u) = \ker(u^2)$, $u$ est l'endomorphisme nul sur $\ker(u^2)$. En recollant toutes ces bases orthonormales, on obtient la réduction voulue pour $u$.

●●●●●●●●●●●●