Devoir libre n°7
Correction

Première partie

Expression d'une matrice M de rang r à l'aide de matrices de rang 1

1. Valeurs propres de l'endomorphisme $m^* \circ m$:
D'après le cours $\mathrm{rg}(m^*) = \mathrm{rg}(m)$ et $\mathrm{rg}(m^* \circ m) = \mathrm{rg}(m^*) = \mathrm{rg}(m) = r$.
L'endomorphisme $m^* \circ m$ étant symétrique et positive, donc il existe une base orthonormée $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ formée de vecteurs propres de $m^* \circ m$ (théorème spectral), de plus les valeurs propres de $m^* \circ m$ sont positives.
Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ les valeurs propres de $m^* \circ m$, en changeant au besoin le numérotage, on peut supposer

$$0 < \alpha_r < ... < \alpha_2 < \alpha_1 \quad \text{et} \quad \alpha_{r+1} = ... = \alpha_n = 0$$

si $r < n$.

2. (a) Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $m^* \circ m(v_i) = \alpha_i v_i$ et donc $(m^* \circ m(v_i)|v_j) = \alpha_i (v_i|v_j)$ ou encore

$$(m(v_i)|m(v_j)) = \alpha_i (v_i|v_j) = \alpha_i \delta_{ij},$$

donc les vecteurs $(m(v_i))_{1 \leq i \leq n}$ sont deux à deux orthogonaux.
En particulier $|m(v_i)|^2 = (m(v_i)|m(v_i)) = \alpha_i (v_i|v_i) = \alpha_i$, d'où $|m(v_i)| = \sqrt{\alpha_i}$.

(b) Posons $Y_i = \dfrac{Mv_i}{\sqrt{\alpha_i}}$ pour $i \in [\![1, r]\!]$, les vecteurs $(Y_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont orthonormés, donc il existe $Y_{r+1}, ..., Y_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $(Y_1, ..., Y_r, Y_{r+1}, ..., Y_n)$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (on peut utiliser par exemple Gram-Schmidt).
Posons ensuite Z_i le vecteur colonne associé à v_i, les deux bases ainsi construites sont orthonormées.
Soit $G = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} Y_i^t Z_i = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\alpha_i} Y_i^t Z_i$. Pour tout $1 \leq j \leq n$, on a

$$G(Z_j) = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\alpha_i} Y_i^t Z_i Z_j = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{\alpha_i}\, {}^t Z_i Z_j Y_i = \sqrt{\alpha_j} Y_j = M v_i.$$

D'où

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\alpha_i} Y_i^t Z_i.$$

Deuxième partie

Approximation d'une matrice de rang r par une matrice de rang inférieur s dans $(E, ((.|.)))$

1. Résolution du problème d'approximation

(a) Posons $N = \sum_{i=1}^{s} \sqrt{\alpha_i} Y_i^t Z_i$, $s < r$. On a clairement

$$\mathrm{Im}(N) \subset \mathrm{Im}(Y_1^t Z_1) + ... + \mathrm{Im}(Y_s^t Z_s),$$

les sous-espaces $\mathrm{Im}(Y_i^t Z_i)$ sont des droites vectorielles (les matrices $Y_i^t Z_i$ sont des matrices de rang 1), donc $\mathrm{rg}(N) \leq s$.
Comme $N \in R_s$,

$$\begin{aligned} d^2(M, R_s) &\leq \|M - N\|^2 \\ &= \|\sum_{i=s+1}^{r} \sqrt{\alpha_i} Y_i^t Z_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \|\sqrt{\alpha_i} Y_i^t Z_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \end{aligned}$$

car la famille de matrices $(Y_i^t Z_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthonormée.
D'où

$$d(M,R_s) \leq \sqrt{\sum_{i=s+1}^{r} \alpha_i} = (\alpha_{s+1}+\ldots+\alpha_r)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Soit N une matrice de rang q avec $q \leq s < r$.

$$\begin{aligned} \|M-N\|^2 &= \operatorname{tr}\left({}^t(M-N)(M-N)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \geq \sum_{i=1}^{n-q} \gamma_i \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-q} \alpha_{i+q} = \sum_{i=q+1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=q+1}^{r} \alpha_i \\ &\geq \sum_{i=s+1}^{r} \alpha_i \end{aligned}$$

Donc $\|M-N\| \geq (\alpha_{s+1}+\ldots+\alpha_r)^{\frac{1}{2}}$

(c) D'après la question précédente, on a

$$\forall N \in R_s, \quad (\alpha_{s+1}+\ldots+\alpha_r)^{\frac{1}{2}} \leq \|M-N\|$$

D'où

$$(\alpha_{s+1}+\ldots+\alpha_r)^{\frac{1}{2}} \leq \inf_{N\in R_s} \|M-N\| = d(M,R_s)$$

ce qui donne avec la question **(a)** de cette partie

$$d(M,R_s) = (\alpha_{s+1}+\ldots+\alpha_r)^{\frac{1}{2}},$$

où les α_i sont les valeurs propres décroissantes de ${}^tMM$.

(d) On sait qu'il existe une matrice M' de rang inférieur ou égal à s telle que $\|M-M'\| = d(M,R_s)$, donc, d'après la caractérisation des éléments adhérents à une partie, $M \in \overline{R_s}$ (l'ensemble des points adhérents à R_s) si, et seulement si, $d(M,R_s)=0$ ou encore $\|M-M'\|=0$ donc $M'=M\in R_s$, par conséquent $\overline{R_s}=R_s$, donc R_s est fermé de E.

<u>DEUXIÈME MÉTHODE</u> : On a l'équivalence

$$\operatorname{rg}(M) \leq s \Leftrightarrow \forall N \text{ de taille} > s \text{ extraite de } N, \; N \text{ est non inversible.}$$

Considérons l'application continue f définie par :

$$f(M) = \sum_{N \quad \text{extrite} \quad \text{de} \quad \text{de taille}>s} |\det(N)|$$

On obtient donc, $f(M)=0$ si, et seulement si, $\forall N$ extraite de M de taille $> s$, $\det(N)=0$ et ceci est équivalent à $\operatorname{rg}(M)\leq s$. D'où

$$\{M\in E/\operatorname{rg}(M)\leq s\} = f^{-1}(\{0\})$$

est un fermé de E. Soit $T_s=\{M\in E/\operatorname{rg}(M)=s\}$, on a $T_s\subset R_s$, donc $\overline{T_s}\subset\overline{R_s}=R_s$. Soit $M\in R_s$ de rang $r<s$, donc il existe P et Q des matrices inversibles telles que

$$M = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} Q.$$

Posons, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$M_k = P\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ & \frac{1}{k}I_{s-r} & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix} Q.$$

On a bien $M_k \in T_s$ et $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = M$. On a ainsi prouvé que

$$\overline{\{M \in E/\operatorname{rg}(M) = s\}} = \{M \in E/\operatorname{rg}(M) \leq s\} = R_s.$$

2. Approximation d'une matrice symétrique

(a) En utilisant les propriétés de la trace, on obtient

$$((A|B)) = \operatorname{tr}({}^tAB) = \operatorname{tr}({}^t({}^tAB)) = \operatorname{tr}({}^tBA) = -\operatorname{tr}(BA) = -\operatorname{tr}({}^tAB),$$

on en déduit que $((A|B)) = 0$.

(b) Soit $(v_1, ..., v_n)$ une base orthonormée diagonalisant A, chaque vecteur v_i ayant Z_i comme matrice, alors ${}^tAA = A^2$ est aussi diagonalisable dans cette même base. On reprend la construction des suites (Y_i) et (Z_j) comme dans la question 1.a, avec Z_i le vecteur colonne associé à v_i, on aura alors $Y_i = \pm Z_i$ et A s'écrira

$$A = \sum_{i=1}^{n} \pm\sqrt{\alpha_i} Y_i^t Y_i$$

où les $\{\alpha_i / i \in [\![1, n]\!]\}$ désignent l'ensemble des valeurs propres (positives) de A^2, et on pourra prendre la matrice symétrique

$$U = \sum_{i=1}^{s} \pm\sqrt{\alpha_i} Y_i^t Y_i.$$

On a alors

$$\|A - U\| = (\alpha_{s+1} + ... + \alpha_r)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda_{s+1}^2 + ... + \lambda_r^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(c) Pour toute matrice V symétrique, on a

$$\|M - V\|^2 = \|(A - V) + B\|^2 = \|A - V\|^2 + \|B\|^2,$$

car les sous-espaces des matrices symétriques et antisymétriques sont orthogonaux dans E pour le produit scalaire $((.|.))$, et donc minimiser $\|M-V\|^2$ revient à minimiser $\|A-V\|^2$. L'existence de V vient du b.qui donne aussi la valeur de $d(M, S_s)$:

$$d(M, S_s) = \sqrt{\lambda_{s+1}^2 + ... + \lambda_r^2 + \|B\|^2}$$

où les λ_i désignent les valeurs propres A comme dans la question **(b)**.

Enfin, il n'y a pas unicité de la matrice V, il suffit pour cela de prendre $M = I_n$ avec $n \geq 2$, $s < n$ alors toute matrice V diagonale contenant exactement s fois 1 sur la diagonale satisfait à la condition imposée.

•••••••••••