Devoir libre n°8

Correction

**1.** On a pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|AX\| \leq \|A\|\|X\|$. Donc si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|ABX\| \leq \|A\|\|BX\| \leq \|A\|\|B\|\|X\|$, d'où :

$$\|AB\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|ABX\|}{\|X\|} \leq \|A\|\|B\|.$$

**2.** (a) La série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ est absolument convergente, car $\frac{\|A^k\|}{k!} \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est complet la série est convergente.

(b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$ la suite de somme partielle associée à la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$. Par l'inégalité triangulaire, on peut écrire :

$$\|S_n(A)\| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Par passage à la limite et par continuité de l'application norme $\|.\|$, on obtient $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $BS_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{BA^k}{k!}$, la série $\sum \frac{BA^k}{k!}$ existe car $\frac{\|BA^k\|}{k!} \leq \frac{\|B\|\|A\|^k}{k!}$, donc par passage à la limite, on obtient

$$B\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{BA^k}{k!}.$$

Si $A_1$ et $A_2$ sont semblables, alors il existe une matrice $P$ inversible telle que $A_2 = PAP^{-1}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n(A_2) = PS_n(A_1)P^{-1}.$$

L'application $M \mapsto PMP^{-1}$ étant continue ( linéaire en dimension finie ), donc par passage à la limite on obtient :

$$\exp(A_2) = P\exp(A_1)P^{-1}.$$

**3.** (a) Comme $A$ et $B$ commutent, on a :

$$\frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{i+j=k} \frac{C_k^i}{k!} A^i B^j = \sum_{i+j=k} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|S_n(A+B) - S_n(A)S_n(B)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{(A+B)^k}{k!} - \sum_{i=0}^{n} \frac{A^i}{i!} \sum_{j=0}^{n} \frac{B^j}{j!} \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} - \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} \right\| \\
&= \left\| \sum_{n+1\leq i+j\leq 2n} \frac{A^i}{i!} \frac{A^j}{j!} \right\| \\
&\leq \sum_{n+1\leq i+j\leq 2n} \frac{\|A\|^i}{i!} \frac{\|A\|^j}{j!} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(\|A\|+\|B\|)^k}{k!} \\
&\quad - \sum_{i=0}^{n} \frac{\|A\|^i}{i!} \sum_{j=0}^{n} \frac{\|B\|^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Lorsque $n$ tend vers l'infini, ce dernier terme tend vers $e^{\|A+B\|} - e^{\|A\|}e^{\|B\|} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(A+B) - S_n(A)S_n(B) = 0$, d'où $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. On a de même $\exp(A+B) = \exp(B+A) = \exp(B)\exp(A)$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{D^n}{n!} = \operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{n!}, \dfrac{2^n}{n!}, \dfrac{3^n}{n!}\right)$, donc $\exp(D) = \operatorname{diag}(e, e^2, e^3)$.

On a $F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F^3 = 0$. Donc

$$\exp(F) = I + F + \frac{F^2}{2!} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $E$ étant diagonalisable, car elle admet trois valeurs propres distinctes 1, 2 et 3. Des vecteurs propres associes sont respectivement $u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,2,2)$. Donc on a l'égalité :

$$E = PDP^{-1}$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où

$$\exp(E) = P\exp(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}P^{-1} = \ldots$$

On remarque $\exp(E) = \exp(D+F) \neq \exp(D)\exp(F)$, en effet les matrices $D$ et $F$ ne commutent pas.

**4.** (a) La propriété est bien vérifiée pour $k = 0$. Supposons maintenant

$$\|(A+B)^k - A^k\| \leq (\|A\| + \|B\|)^k - \|A\|^k.$$

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
\|(A+H)^{k+1} - A^{k+1}\| &= \|(A+H)^k(A+H) - A^kA\| \\
&\leq \|(A+H)^kA - A^kA - (A+H)^kH\| \\
&\leq \|(A+H)^k - A^k\| + \|A+H\|^k\|H\| \\
&\leq ((\|A\| + \|H\|)^k - \|A\|^k)\|A\| \\
&\quad + (\|A\| + \|H\|)^r(\|H\| + \|A\| - \|A\|) \\
&\leq (\|A\| + \|H\|)^k\|A\| - \|A\|^{k+1} \\
&\quad + (\|A\| + \|H\|)^{k+1} - (\|A\| + \|H\|)^k\|A\| \\
&= (\|A\| + \|H\|)^{k+1} - \|A\|^{k+1}
\end{aligned}$$

(b) D'après l'inégalité précédente, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned}
\|\sum_{k=0}^{n} \frac{(A+H)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\| &\leq \sum_{k=0}^{n}(\frac{(A+H)^k}{k!} - \frac{A^k}{k!}) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}(\frac{\|A\| + \|H)\|^k}{k!} - \frac{\|A\|^k}{k!}) \\
&\leq e^{\|A\|}(e^{\|H\|} - 1)
\end{aligned}$$

Quand $n$ tend vers l'infini on obtient

$$\|\exp(A+H) - \exp(A)\| \leq e^{\|A\|}(e^{\|H\|} - 1),$$

inégalité qui montre que $\lim\limits_{H\to 0} \exp(A+H) = \exp(A)$, donc l'application exponentielle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**5.** (a) On peut montrer par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$C_\theta^{2p} = \begin{pmatrix} (-1)^p\theta^{2p} & 0 \\ 0 & (-1)^p\theta^{2p+1} \end{pmatrix}$$

et

$$C_\theta^{2p+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^p\theta^{2p+1} \\ (-1)^{p+1}\theta^{2p+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $\exp(C_\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_\theta^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{C_\theta^{2p+1}}{(2p+1)!} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On a $C_\theta \neq C_{\theta+2\pi}$ cependant $\exp C_\theta = \exp C_{\theta+2\pi}$, donc l'application $A \mapsto \exp(A)$ n'est pas injective.

(b) On a $\exp(A) - I_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = A(I_n + S_A)$ avec $S_A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k+1)!}$. $\lim_{A\to 0} S_A = 0$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\|A\| \leq \alpha \Rightarrow \|S_A\| \leq 1$.

(c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $(I_n + T)X = 0$ ou encore $TX = -X$. Si $X \neq 0$, alors $\frac{\|TX\|}{\|X\|} = 1$ et donc $\|T\| \geq 1$, ce qui est absurde, d'où $X = 0$.

(d) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M\| \leq \alpha$ et $\exp(M) = I_n$. Donc $\exp(M) - I_n = M(I_n + S_M) = 0$, mais $\|M\| \leq \alpha \Rightarrow \|S_M\| < 1$, donc $I + S_M$ est inversible et par conséquent $M = 0$.

• • • • • • • • •