Devoir libre n°9
Correction

**1.** Posons $\varphi(t)=\dfrac{1}{n+1}\left(\int_0^t g(s)ds\right)^{n+1}$, d'où $\varphi'(t)=g(t)\left(\int_0^t g(s)ds\right)^n$. Par suite

$$\int_0^t \varphi'(s)ds=\varphi(t)-\varphi(0)=\varphi(t)=\int_0^t\left[g(s)ds\left(\int_0^s g(u)ds\right)^n\right]ds.$$

**2.** (a) On a, pour tout $t\geq 0$, $v'(t)=u(t)\leq f(t)+g(t)\int_0^t u(s)ds=f(t)+v(t)g(t)$.

(b) Dans le cas particulier où $g(t)=a$, on a pour tout $t\geq 0$ :

$$w'(t)=v'(t)e^{-at}-av(t)e^{-at}\leq f(t)e^{-at}.$$

Puis, en intégrant,

$$w(t)=\int_0^t w'(s)ds\leq\int_0^t e^{-as}f(s)ds.$$

Comme $w(t)=v(t)e^{-at}$, on en déduit

$$v(t)\leq\int_0^t e^{a(t-s)}f(s)ds.$$

(c) Dans le cas général, on a

$$w'(t)=(v'(t)-v(t)g(t))\exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right)\leq f(t)\exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right).$$

Puis

$$w(t)=\int_0^t w'(s)ds\leq\int_0^t f(s)\left[\exp\left(-\int_0^s g(x)dx\right)\right]ds$$

et, en remplaçant $w(t)$ par sa valeur

$$v(t)\leq\int_0^t f(s)\left[\exp\left(\int_s^t g(x)dx\right)\right]ds.$$

(d) On peut appliquer ce qui précède en prenant pour $f$ la fonction nulle. On obtient ainsi

$$\forall t\geq 0,\quad 0\leq u(t)\leq 0.$$

Autrement dit, la seule fonction $u$ satisfaisant aux conditions imposées est la fonction nulle.

**3.** (a) Puisque $u$ est croissante, l'inégalité $t'>t$ implique

$$u(t'-s)\geq u(t-s)$$

pour toute valeur de $s$. On en déduit, car $\phi$ est positive

$$\int_0^t\left[u(t'-s)-u(t-s)\right]\phi(s)ds\geq 0.$$

Comme $u$ est aussi à valeurs positives, on a également

$$\int_t^{t'} u(t-s)\phi(s)ds\geq 0.$$

Finalement, on voit que $t'>t$ implique $U(t')\geq U(t)$ : la fonction $U$ est croissante.

(b) Montrons la continuité de $U$ en 0. Puisque $u$ et $\phi$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$, on peut poser

$$M=\sup_{t\in[0,1]}|u(t)|,\quad M^*=\sup_{t\in[0,1]}|\phi(t)|.$$

On a alors

$$\forall t > 0, \quad |U(t)| \leq \int_0^t |u(t-s)||\phi(s)|ds \leq tMM^*.$$

Donc

$$\lim_{t\to 0} U(t) = U(0) = 0.$$

Soit $t_0 > 0$. Ici encore, la continuité de $u$ et de $\phi$ justifie l'existence de $M$ et $M^*$. On peut écrire, pour $t \in [t_0, 2t_0]$,

$$U(t) - U(t_0) = \int_0^{t_0} [u(t-s) - u(t_0-s)]\,\phi(s)ds + \int_{t_0}^t u(t-s)\phi(s)ds.$$

La fonction $u$ étant continue sur le segment $[0, 2t_0]$, donc elle est uniformément continue sur cet intervalle. Par suite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (y, y') \in [0, 2t_0]^2, |y - y'| < \alpha \Longrightarrow |u(y) - u(y')| \leq \varepsilon.$$

Or $t \in [t_0, 2t_0]$ et $s \in [0, t_0]$ impliquent $t - s \in [0, 2t_0]$. Par conséquent,

$$|t - t_0| < \alpha \Longrightarrow |u(t-s) - u(t_0 - s)| \leq \varepsilon,$$

d'où

$$\begin{aligned} |U(t) - U(t_0)| &\leq \int_0^{t_0} |u(t-s) - u(t_0-s)||\phi(s)|ds + \int_{t_0}^t |u(t-s)||\phi(s)|ds \\ &\leq t_0\varepsilon M^* + (t - t_0)MM^*. \end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon' > 0$. Choisissons $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{2t_0M^*}$. Pour toutes les valeurs de $t$ telles que $0 \leq t - t_0 \leq \inf\left(t_0, \dfrac{\varepsilon'}{2t_0MM^*}\right)$, on aura

$$|U(t) - U(t_0)| \leq t_0\varepsilon M^* + (t - t_0)MM^* \leq \varepsilon'.$$

On a donc prouvé la continuité de $U$ à droite en $t_0$.
La continuité à gauche se montre de façon analogue. On écrit, pour $t \in [0, t_0]$,

$$U(t) - U(t_0) = \int_0^{t_0} (u(t-s) - u(t_0-s)]\,\phi(s)ds + \int_{t_0}^t u(t-s)\phi(s)ds.$$

D'où

$$|t - t_0| \leq \alpha \Longrightarrow |U(t) - U(t_0)| \leq \varepsilon t M^* + (t_0 - t)MM^* \leq \varepsilon t_0 M^* + (t_0 - t)MM^*.$$

On conclut ensuite comme précédemment.

••••••••••