Devoir libre n°10
Correction

Exercice : 1

1. Le système $\begin{cases} z'(t) = \lambda + z^2(t) \\ z(t_0) = \mu \end{cases}$ conduit à $\dfrac{z'(t)}{\lambda + z^2(t)} = 1$ et donc $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{z'(s)}{\lambda + z^2(s)} ds = t - t_0$ ou encore $\left[\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \arctan\left(\dfrac{z(s)}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]_{t_0}^{t} = t - t_0$.

D'où $z(t) = \sqrt{\lambda} \tan\left(\sqrt{\lambda}(t - t_0) + \arctan\left(\dfrac{z(t_0)}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)$. Cette équation permet de préciser l'intervalle de définition de la solution maximale :

$$\frac{-\pi}{2} < \sqrt{\lambda}(t - t_0) + \arctan\left(\frac{z(t_0)}{\sqrt{\lambda}}\right) < \frac{\pi}{2}.$$

$$]\alpha, \beta[= \left]t_0 - \arctan\left(\frac{z(t_0)}{\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}, t_0 - \arctan\left(\frac{z(t_0)}{\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}\right[.$$

2. Soit φ solution maximale définie sur $]a, b[$ du problème de Cauchy $\begin{cases} \varphi'(t) = t + \varphi^2(t) \\ \varphi(t_0) = \nu \end{cases}$

(a) Si $t_0 > 0$, sur $[t_0, b[$ on a $\varphi'(t) = t + \varphi^2(t) \geq t_0 > 0$, donc φ est strictement croissante sur $[t_0, b[$.

(b) Comme φ croît sur cet intervalle, on a $\varphi(t) \geq \varphi(t_0) = \nu > 0$. Donc φ est strictement positive sur $[t_0, b[$.

(c) Pour montrer que $b \in \mathbb{R}$ ($b \neq +\infty$) et $\lim\limits_{t \to b} \varphi(t) = +\infty$, on raisonne par l'absurde : si φ était définie sur $]t_0, +\infty[$, on aurait, pour $t \geq t_0$:

$$\varphi'(t) = t + \varphi^2(t) \geq t_0 + \varphi^2(t),$$

$$\frac{\varphi'(t)}{t_0 + \varphi^2(t)} \geq 1,$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(s)}{t_0 + \varphi^2(s)} ds \geq t - t_0,$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{t_0}} \arctan\left(\frac{\varphi(s)}{\sqrt{t_0}}\right)\right]_{t_0}^{t} \geq t - t_0.$$

D'où la contradiction puisque le membre de gauche est borné contrairement à $(t - t_0)$ qui tend vers $+\infty$. Donc l'hypothèse $b = +\infty$ est à rejeter.

Plus encore, la dernière égalité nous permet de majorer la borne b. En effet, elle conduit à

$$\varphi(t) \geq \sqrt{t_0} \tan\left(\sqrt{t_0}(t - t_0) + \arctan\left(\frac{\varphi(t_0)}{\sqrt{t_0}}\right)\right)$$

alors que le membre de droite tend vers l'infini lorsque $\left(\sqrt{t_0}(t - t_0) + \arctan\left(\dfrac{z(t_0)}{\sqrt{t_0}}\right)\right)$ tend vers $\dfrac{\pi}{2}$

Ainsi $b \leq t_1 = t_0 + \dfrac{1}{\sqrt{t_0}}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{z(t_0)}{\sqrt{t_0}}\right)\right)$ et $\lim\limits_{t \to b} \varphi(t) = +\infty$.

Exercice : 2

1. (a) Soit y une solution de $(\mathcal{E})$. Cette solution est de classe $\mathcal{C}^1$. On le montre classiquement par récurrence : y est deux fois dérivable donc continue et $x \mapsto y"(x) = 6y(x) + x$ aussi continue. Donc y est de classe $\mathcal{C}^2$. Supposons y de classe $\mathcal{C}^n$. $y"$ est aussi de classe $\mathcal{C}^n$, donc y est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$.

(b) En posant $Z(x) = (y(x), y'(x))$, ce problème de Cauchy est équivalent au système d'ordre 1

$$\begin{cases} Z'(x) = F(x, Z(x)) \\ Z(x_0) = (a, b) \end{cases}$$

dans lequel $F(x, Z) = (z_2, z_1^2 + x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Ainsi, ce système admet une solution maximale et une seule définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

(c) La formule de Taylor-Young donne :

$$y(x) = a + bx + \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{1}{6}(1 + 2ab)x^3 + \frac{1}{12}\left(a^3 + b^2\right)x^4 + o(x^4)$$

2. (a) On trouve $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = \dfrac{a_0^2}{2}$, $a_3 = \dfrac{1}{6}(1 + 2a_0a_1)$ et, pour $n \geq 2$,

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

(b)

```
a=0.5
b=0.5
n=int(input("Donner n="))
A=[]
A.append(a)#A[0]=a
A.append(b)#A[0]=b
A.append((1/2)*a**2)
A.append((1/6)*(1+2*a*b))
for k in range(2,n+1):
    s=0
    for j in range(0,k+1):
        s=s+A[j]*A[k-j]
    A.append((1/((k+2)*(k+1)))*s)  #A[n+2]=(1/(n+1)*(n+2))*s
print(A)
```

```
Donner n=10
[0.5, 0.5, 0.125, 0.25, 0.03125, 0.018750000000000003, 0.009895833333333333,

0.002678571428571428, 0.0017671130952380952, 0.00045676256613756 61,

0.00019190228174603176, 8.19391835016835e-05, 2.575591605539522e-05]
```

(c) On a, comme conséquence immédiate de

$$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

$$\forall n \geq 2, \quad |a_{n+2}| \leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} |a_k||a_{n-k}| \leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sum_{k=0}^{n} M_n^2 = \frac{M_n^2}{n+2}.$$

Partant de là,

$$M_{2p} \leq \prod_{k=2}^{p} \left[\frac{1}{2k}\right]^{2^{p-k}} \times M_2^{2^{p-1}}$$

Le logarithme de l'expression à droite est

$$2^{p-1}\left[\ln(M_2) - \sum_{k=2}^{p} \frac{\ln(2k)}{2^{k-1}}\right].$$

Trois cas se présentent selon que $\ln(M_2)$ est égal, supérieur ou inférieur à la somme de la série $\sum_{k\geq 2} \frac{\ln(2k)}{2^{k+1}}$.

Dans le cas où $a = b = 0.5$ on a $M_2 = 0.125$ et donc $\ln(M_2) < 0$. Par conséquent le logarithme de l'expression à droite reste négative quand p tend vers l'infini, donc $(M_p)_p$ a pour limite 0, ce qui nous assure $\lim_{p\to\infty} a_p = 0$ et un rayon de convergence ≥ 1.

3. Supposons qu'une solution soit de la forme $y(x) = \dfrac{\phi(x)}{(x-a)^q}$ sur $]\alpha, a[$ ou sur $]a, \beta[$, on observe tout d'abord que ϕ est elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$, le calcul donne :

$$y"(x) = \frac{(x-a)^2\phi''(x) - 2q(x-a)\phi'(x) + q(q+1)\phi(x)}{(x-a)^{q+2}}$$

Ainsi, y est solution de (E) si, et seulement si,

$$(x-a)^{q-2}\left[(x-a)^2\phi"(x) - 2q(x-a)\phi'(x) + q(q+1)\phi(x)\right] = \phi^2(x) + x(x-a)^{2q}$$

- si $q > 2$, on obtient une contradiction en faisant $x = a$ puisque $\phi(a) \neq 0$.
- si $q < 2$, on obtient une contradiction en tendant x vers a puisque le membre de gauche tend vers ∞.

En conséquence, $q = 2$.

••••••••••