Devoir libre n°11

Correction

Exercice : 1

Notons $E = A \cap B$, $A' = A \setminus E$, $B' = B \setminus E$ et $F = \Omega \setminus (A \cup B)$. On a alors partitionné Ω en quatre parties disjointes. De

$$A = A' \cup E,\ B = B' \cup E \text{ et } F = \Omega \backslash (A' \cup B' \cup E)$$

il vient :

$$\begin{aligned} p(A \cap B) - p(A)p(B) &= p(E) - [P(E) + p(A')]\,[P(E) + p(B')] \\ &= p(E)\,[1 - p(E) - p(A') - p(B')] - p(A')p(B') \\ &= p(E)p(F) - p(A')p(B') \end{aligned}$$

Notant alors $x = p(E)$, $y = p(F)$, $z = p(A')$ et $t = p(B')$, on est ramené à prouver que

$$\forall (x, y, z, t) \in (\mathbb{R}^+)^4, \quad x + y + z + t = 1 \Longrightarrow |xy - zt| \leq \frac{1}{4}$$

et à caractériser le cas d'égalité.
Notons que, x et y étant deux réels positifs de somme inférieure à 1, le produit xy est nécessairement inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$. En effet si $(x, y) \in \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$, alors $0 \leq xy \leq x(1 - x)$ et la fonction $x \mapsto x(1 - x)$ atteint son maximum en $\frac{1}{2}$ et vaut $\frac{1}{4}$.
Le raisonnement étant le même pour zt, xy et zt sont deux nombres compris entre 0 et $\frac{1}{4}$. Leur différence est donc comprise entre $-\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4}$, ce qui démontre l'inégalité.
Les cas d'égalité correspondent aux cas où l'un des deux produits vaut $\frac{1}{4}$ et l'autre 0, soit :

- $p(E) = p(F) = \frac{1}{2}$, et donc $p(A') = p(B') = 0$, auquel cas A et B sont (presque sûrement) confondus et de probabilité $\frac{1}{2}$.
- $p(A') = p(B') = \frac{1}{2}$, et donc $p(E) = p(F) = 0$, auquel cas A et B sont (presque sûrement) disjoints, et tous deux de probabilité $\frac{1}{2}$.

Remarquons pour finir que le minimum de la quantité étudiée est évidement 0, et correspond au cas où A et B sont indépendants.

Exercice : 2

1. D_1 est l'événement « choisir le dé D_1 », c'est donc l'événement « obtenir pile », on en déduit :

$$P(D_1) = \frac{1}{3}.$$

D_2 est l'événement « choisir le dé D_2 », c'est donc l'événement « obtenir face », on en déduit :

$$P(D_2) = \frac{2}{3}.$$

On choisit un dé parmi le dé 1 et le dé 2 et on ne choisit qu'un seul dé, on en déduit que (D_1, D_2) est un système complet d'événements.

2. Soient n un entier naturel non nul et R_n l'événement « on a obtenu une face rouge au n-ème lancer ».

(a) Si D_1 lieu, on utilise un dé avec 6 faces dont 4 rouges, on en déduit :

$$P_{D_1}(R_n) = \frac{4}{6}.$$

(b) Si D_2 lieu, on utilise un dé avec 6 faces dont 2 rouges, on en déduit :

$$P_{D_2}(R_n) = \frac{2}{6}.$$

3. (D_1, D_2) étant un système complet d'événement et $P(D_1) \times P(D_2) \neq 0$, on peut affirmer, d'après la formule des probabilités totales que :

$$\begin{aligned} P(R_1) &= P_{D_1}(R_1) \times P(D_1) + P_{D_2}(R_1) \times P(D_2) \\ &= \frac{4}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

4. Une fois le dé choisi, les lancers deviennent indépendants, on en déduit :

$$P_{D_1}(R_1 \cap R_2) = P_{D_1}(R_1) \times P_{D_1}(R_2).$$

De même, on a $P_{D_2}(R_1 \cap R_2) = P_{D_2}(R_1) \times P_{D_2}(R_2)$. En utilisant de nouveau la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement (D_1, D_2), on a :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= P_{D_1}(R_1 \cap R_2) \times P(D_1) + P_{D_2}(R_1 \cap R_2) \times P(D_2) \\ &= P_{D_1}(R_1) \times P_{D_1}(R_2) \times \frac{1}{3} + P_{D_2}(R_1) \times P_{D_2}(R_2) \times \frac{2}{3} \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{6}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

5. (a) Soit n un entier naturel non nul. Une fois le dé choisi, les lancers deviennent indépendants, on en déduit :

$$\begin{cases} P_{D_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) & = P_{D_1}(R_1) \times P_{D_1}(R_2) \times \cdots \cap P_{D_1}(R_n) \\ & = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \times \cdots \frac{4}{6} \\ & = \left(\frac{4}{6}\right)^n \\ P_{D_2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) & = P_{D_2}(R_1) \times P_{D_2}(R_2) \times \cdots \cap P_{D_2}(R_n) \\ & = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \cdots \frac{2}{6} \\ & = \left(\frac{2}{6}\right)^n \end{cases}.$$

En utilisant de nouveau la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement (D_1, D_2), on a :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) &= P_{D_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) \times P(D_1) + P_{D_2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) \times P(D_2) \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^n \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{6}\right)^n \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2^n}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2^n + 2}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

(b) Comme $P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) \neq 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n}(R_{n+1}) &= \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n \cap R_{n+1})}{P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)}\\
&= \frac{\dfrac{2^{n+1}+2}{3^{n+2}}}{\dfrac{2^n+2}{3^{n+1}}}\\
&= \frac{(2^{n+1}+2)\times(3^{n+1})}{3^{n+2}\times(2^n+2)}\\
&= \frac{2^n+1}{3\times(2^{n-1}+1)}
\end{aligned}
$$

6. (a) $P(R_1 \cap R_2) \neq 0$ et $P(D_1) \neq 0$. D'après la formule de Bayes, on a donc :

$$
\begin{aligned}
P_{R_1\cap R_2}(D_1) &= \frac{P_{D_1}(R_1 \cap R_2)\times P(D_1)}{P(R_1 \cap R_2)}\\
&= \frac{\left(\dfrac{4}{6}\right)^2 \times \dfrac{1}{3}}{\dfrac{2}{9}} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

(b) Soit n un entier naturel non nul. $P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) \neq 0$ et $P(D_1) \neq 0$. D'après la formule de Bayes, on a donc :

$$
\begin{aligned}
P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n}(D_1) &= \frac{P_{D_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)\times P(D_1)}{P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)}\\
&= \frac{\left(\dfrac{4}{6}\right)^n \times \dfrac{1}{3}}{\dfrac{2^n+2}{3^{n+1}}}\\
&= \frac{2^n \times 3^{n+1}}{3^n \times 3 \times (2^n+2)}\\
&= \frac{2^n}{2^n+2}
\end{aligned}
$$

7. Soit n un entier naturel non nul. On a vu que :

$$P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n}(D_1) = \frac{2^n}{2^n+2}.$$

On a vu aussi que :

$$P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n}(R_{n+1}) = \frac{2^n+1}{3\times(2^{n-1}+1)}.$$

On a :

$$
\begin{aligned}
P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n}(D_1) \geq P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n}(R_{n+1}) &\Leftrightarrow \frac{2^n}{2^n+2} \geq \frac{2^n+1}{3\times(2^{n-1}+1)}\\
&\Leftrightarrow 3\times(2^{n-1}+1)\times 2^n \geq (2^n+1)(2^n+2)\\
&\Leftrightarrow 3\times(2^n+2)\times 2^{n-1} \geq (2^n+1)(2^n+2)\\
&\Leftrightarrow 3\times 2^{n-1} \geq 2^n+1\\
&\Leftrightarrow 3\times 2^{n-1} \geq 2\times 2^{n-1}+1\\
&\Leftrightarrow 2^{n-1} \geq 1
\end{aligned}
$$

Or n est supérieur à 1 donc $2^{n-1} \geq 1$. Par les équivalences précédentes, on peut donc affirmer que :

$$P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n}(D_1) \geq P_{R_1\cap R_2\cap\cdots\cap R_n}(R_{n+1}).$$

••••••••••