Devoir libre n°1
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

●●●●●●●●●●●

Partie I

1. (a) Par définition on a, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $E_{ij} = (\delta_{ki}\delta_{lj})_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2}$.
Soit $(u,v) \in [\![1,n]\!]^2$. Le coefficient de la ligne u et de la colonne v, de $E_{ij}E_{h,k}$ est

$$\sum_{w=1}^{n}(\delta_{ui}\delta_{wj})(\delta_{wh}\delta_{vk}) = \delta_{ui}\delta_{vk}\sum_{w=1}^{n}\delta_{wj}\delta_{wh} = \delta_{ui}\delta_{vk}\delta_{jh}. \text{ (obtenu pour } w=j).$$

Ce coefficient est aussi celui de $\delta_{jh}E_{ik}$ ce qui démontre le résultat :

$$E_{ij}E_{hk} = \delta_{jh}E_{ik}.$$

(b) $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; c'est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A s'écrit dans cette base : $A = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}E_{ij}$.

(c) Si $i \neq j$, $\det(I_n + \lambda E_{ij}) = 1$, car $I_n + \lambda E_{ij}$ est une matrice triangulaire avec des 1 sur la diagonale.

(d) Avec $i \neq j$, $j \neq h$ et $h \neq k$, on a :

$$(I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \mu E_{hk}) = I_n + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik} = I_n + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk}$$

On en déduit $(I_n + \lambda E_{ij})(I_n - \lambda E_{ij}) = I_n$, donc $I_n + \lambda E_{ij}$ est inversible d'inverse $I_n - \lambda E_{ij}$.

2. (a) Soit $i \neq j$ et $A = \displaystyle\sum_{1\leq h,k\leq n} a_{hk}E_{hk}$. Alors $(I_n + \lambda E_{ij})A = A + \lambda E_{ij}A$ avec

$$\lambda E_{ij}A = \lambda\sum_{1\leq h,k\leq n} a_{hk}E_{ij}E_{hk} = \lambda\sum_{1\leq h,k\leq n} a_{hk}\delta_{jh}E_{ik} = \lambda\sum_{k=1}^{n} a_{jk}E_{ik}.$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{jk}E_{ik}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la i-ème ligne, qui sont ceux de la j-ème ligne de A.
Ainsi, $(I_n + \lambda E_{ij})A$ est la matrice obtenue à partir de A par le remplacement de la ligne L_i par la ligne $L_i + \lambda L_j$

(b) On trouve de même que la matrice $A(I_n + \lambda E_{ij})$ est celle obtenue à partir de A par le remplacement de la colonne C_i par la colonne $C_i + \lambda C_j$.
On peut aussi utiliser la relation : ${}^t((I_n + \lambda E_{ij})A) = {}^t(I_n + \lambda E_{ij}){}^tA = (I_n + \lambda E_{ji}){}^tA$ et se ramener ainsi au cas précédent.

3. **Premier cas :** $a_{11} = 1$: Les opérations $L_i \leftarrow L_i - a_{i1}L_1$ ($2 \leq i \leq n$) et $C_j \leftarrow C_j - a_{1j}C_1$ ($2 \leq j \leq n$) transforment A en une matrice B de la forme $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

D'après ce qui précède, $B = PAQ$ où $P = \displaystyle\prod_{i=2}^{n}(I_n + a_{i1}E_{i1})$ et $Q = \displaystyle\prod_{j=2}^{n}(I_n + a_{1j}E_{1j})$ ce qui donne le résultat demandée.

Deuxième cas : Il existe $i > 1$ tel que $a_{i1} \neq 0$: Alors l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1-a_{11}}{a_{i1}} L_i$ transforme A en une matrice A' du type précédent.
Ainsi, $B = PAQ$, où $P = \prod_{i=2}^{n} (I_n + a_{i1}E_{i1}) \left(I_n + \dfrac{1-a_{11}}{a_{i1}} E_{i1} \right)$ et $Q = \prod_{i=2}^{n} (I_n + a'_{i1}E_{i1})$, sera du type voulu.
Troisième cas : Il existe $j \geq 2$ tel que $a_{1j} \neq 0$. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \dfrac{1-a_{11}}{a_{1j}} C_j$ nous ramène là encore au premier cas, et on conclut comme ci-dessus.
Quatrième cas : $a_{11} \neq 0$ et $\forall i \geq 2$ $a_{i1} = 0$ et $\forall j \geq 2$ $a_{1j} = 0$: L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ (multiplication à gauche par $I_n + E_{21}$) nous ramène au deuxième cas, ce qui achève la démonstration.

4. Remarquons d'abord que la multiplication à droite ou à gauche d'une matrice par une matrice de transvection ne change pas le déterminant.
• Cas $n = 2$:
○ Si la première ligne ou la première colonne de A n'est pas nulle, la question précdente donne : il existe P, Q, produits de matrices de transvection d'ordre 2, telles que $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = B$ et $\det B = \det A = b$.
Cela donne le résultat. (le cas $r = 1$ correspondant au cas $b = 0$)
○ Sinon, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ nous ramène au cas précédent (car $A \neq 0$).
• Supposons le résultat démontré à l'ordre $n - 1 \geq 2$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $rg(A) = r \geq 1$.
○ Si la première ligne ou la première colonne de A n'est pas nulle, il existe P, Q produit de matrices de transvection d'ordre n, telles que $A = PAQ = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ avec $rg(B) = rg(A) = r$ et $\det B = \det B' = \det A$.
On a $B' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $rg(B') = r - 1$.
▷ Si $rg(B') = 0$, c'est-à-dire si $r = 1$, on a directement le résultat voulu.
▷ Sinon, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer qu'il existe P_1, Q_1, produit de matrices de transvection d'ordre $n - 1$, telles que $P_1 B' Q_1 = B_1$ avec

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ si } rg(B_1) < n - 1$$

et

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & (0) & & \det(B_1) \end{pmatrix} \text{ si } rg(B_1) = n - 1 \text{ (et } \det B_1 = \det B' = \det A \text{).}$$

En notant $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, on vérifie alors facilement, en effectuant le produit par blocs :

$$P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & P_1B'Q_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Soit $P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & 1 & \\ 0 & & & \det(A) \end{pmatrix}$ si $\mathrm{rg}B = n-1$ c'est-à-dire $\mathrm{rg}(A) = n$, et $P'AQ' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ sinon.

On obtient alors le résultat à l'ordre n, en remarquant que si P_1 et Q_1 sont des produits de matrices de transvection d'ordre $n-1$, P' et Q' sont encore des produits de matrices de transvection d'ordre n (car, si T est une matrice de transvection d'ordre $n-1$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$ est une matrice de transvection d'ordre n).

∘ Le cas où la première ligne et la première colonne de A sont nulles se ramène au cas précédent, à l'aide de l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + L_i$ où L_i est une ligne non nulle de A (il en existe car $A \neq 0$).

5. D'après ce qui préécde, si A est une matrice carrée de déterminat 1(leur ensemble forme un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, noté $SL_n(\mathbb{R})$), il existe P, Q produit de matrices de transvection telles que $I_n = PAQ$ soit $A = P^{-1}Q^{-1}$.
P^{-1}, Q^{-1} étant elles auusi des produit de matrices de transvection, A est donc produit de matrices de transvection. Donc $SL_n(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices de transvection.

6. (a) Calculons $A = (I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \mu E_{hk})(I_n + \lambda E_{ij})^{-1}(I_n + \lambda E_{hk})^{-1}$ en supposant $i \neq j$ et $h \neq k$. On a :

$$\begin{aligned} A &= (I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \mu E_{hk})(I_n - \lambda E_{ij})(I_n - \lambda E_{hk}) \\ &= (I_n + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik})(I_n - \lambda E_{ij} - \mu E_{hk} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik}) \\ &= I_n + \lambda E_{ij} + \mu E_{hk} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik} - \lambda E_{ij} - \lambda^2 E_{ij}^2 - \lambda\mu\delta_{ik}E_{hj} - \lambda^2\mu\delta_{jh}\delta_{ik}E_{ij} \\ &\quad -\mu E_{hk} - \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik} - \lambda\mu^2\delta_{jh}\delta_{kh}E_{ih} + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik} \\ &\quad \lambda^2\mu\delta_{jh}\delta_{ji}E_{ik} + \lambda\mu^2\delta_{jh}\delta_{ik}E_{hk} + \lambda^2\mu^2\delta_{jh}\delta_{jh}\delta_{ik}E_{ik} \\ &= I_n + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik} - \lambda\mu\delta_{ik}E_{hj} - \lambda^2\mu\delta_{jh}\delta_{ik}E_{ij} + \lambda\mu^2\delta_{jh}\delta_{ik}E_{hk} + \lambda^2\mu^2\delta_{jh}\delta_{ik}E_{ik} \end{aligned}$$

En supposant $i \neq k$, on a $A = I_n + \lambda\mu\delta_{jh}E_{ik}$ puis, pour $h = j$: $A = I_n + \lambda\mu E_{ik}$ (il est possible de trouver $(i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3$ tel que $i \neq j$, $i \neq k$ et $j \neq k$ car $n \geq 3$). Il suffit donc ensuite de choisir $i = \alpha$, $k = \beta$ et $\lambda\mu = a$ pour obtenir $A = I_n + aE_{\alpha\beta}$.

(b) Soit $A = I_n + aE_{\alpha\beta}$ avec $\alpha \neq \beta$ une matrice de transvection, et i, j, h, k, λ, μ comme ci-dessus. On a alors :

$$f(A) = f(I_n + \lambda E_{ij})f(I_n + \mu E_{ij})f((I_n + \lambda E_{ij})^{-1})f((I_n + \lambda E_{ij})^{-1}).$$

Donc

$$f(A) = f(I_n + \lambda E_{ij})f((I_n + \lambda E_{ij})^{-1})f(I_n + \mu E_{ij})f((I_n + \lambda E_{ij})^{-1})$$

$$f(A) = f\left[(I_n + \lambda E_{ij})(I_n + \lambda E_{ij})^{-1}\right] f\left[(I_n + \mu E_{ij})(I_n + \lambda E_{ij})^{-1}\right] = f(I_n)f(I_n)$$

Or $f(I_n) = 1$, d'où $f(A) = 1$.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, il existe P et Q produits de matrice de transvection, telles que $B = PAQ$ soit diagonale, de la forme décrite à la question 4, donc $f(B) = \det(A)$.
D'autre part, on a $f(B) = f(P)f(A)f(Q) = 1 \times f(A) \times 1$, d'où $f(A) = \det(A)$.

Partie II

1. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{tr}(A + \lambda B) = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B)$, donc l'application tr est linéaire.

Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $C = AB = (c_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$. On a

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = \operatorname{tr}(BA).$$

2. (a) Soit $i \neq j$. On a $\sigma(E_{ij} E_{ii}) = \sigma(0) = 0$ car σ est linéaire. D'où $0 = \sigma(E_{ii} E_{ij}) = \sigma(E_{ij}) = 0$.

(b) $\sigma(E_{ij} E_{ji}) = \sigma(E_{ji} E_{ij})$, d'où $\sigma(E_{ii}) = \sigma(E_{jj})$ pour tous $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

(c) Notons λ la valeur commune des $\sigma(E_{ii})$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} E_{ij}$. σ étant linéaire, donc :

$$\sigma(M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{ij} \sigma(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} \sigma(E_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} m_{ii}.$$

En conclusion, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma(M) = \lambda \operatorname{tr}(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$, donc $\forall M \in \mathcal{T}$, $\operatorname{tr}(M) = 0$, car M est combinaison linéaire de matrices de la forme $AB - BA$, et tr est une forme linéaire.
Notons $\mathcal{T}' = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{tr}(M) = 0\}$, on a donc $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. De plus, $\dim \mathcal{T}' = n^2 - 1$ puisque $\mathcal{T}'$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Donc $\dim \mathcal{T} \leq n^2 - 1$.
D'autre part : si $i \neq j$: $E_{ij} = E_{ii} E_{ij} - E_{ij} E_{ii} \in \mathcal{T}$ et si $i \in [\![2, n]\!]$, $E_{11} - E_{ii} = E_{1i} E_{i1} - E_{i1} E_{1i} \in \mathcal{T}$. Donc $\mathcal{T}$ contient, en particulier, les $n^2 - 1$ matrices $(E_{ij})_{i \neq j}$ et $(E_{11} - E_{ii})_{2 \leq i \leq n}$. Ces matrices étant linéairement indépendantes, il en résulte que $\dim \mathcal{T} \geq n^2 - 1$.
Finalement $\dim \mathcal{T} = n^2 - 1$ et donc $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.
Puisque $I_n \notin \mathcal{T}' = \mathcal{T}$, la droite vectorielle engendrée par I_n est bien un supplémentaire de $\mathcal{T}$ et donc

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}.$$

4. On trouve, comme dans la question I.6.(a),

$$F_{hk}^{-1} F_{ij} F_{hk} = I_n + E_{ij} - \delta_{ik} E_{hj} + \delta_{jh} E_{ik} - \delta_{ik} \delta_{jh} E_{hk}.$$

5. On a alors :

$$\theta(F_{hk}^{-1} F_{ij} F_{hk}) = \theta(F_{ij} F_{hk} F_{hk}^{-1}) = \theta(F_{ij}).$$

D'où :

$$\theta(F_{ij}) = \theta(F_{ij}) - \delta_{ik} \theta(E_{hj}) + \delta_{jh} \theta(E_{ik}) - \delta_{ik} \delta_{jh} \theta(E_{hk})$$

Donc

$$-\delta_{ik} \theta(E_{hj}) + \delta_{jh} \theta(E_{ik}) - \delta_{ik} \delta_{jh} \theta(E_{hk}) = 0.$$

Pour $i = j = h$ et $i \neq k$, on obtient : $\theta(E_{ik}) = 0$.
Pour $i = k$, $j = h$ et $i \neq j$, on obtient $\theta(E_{ii}) - \theta(E_{jj}) = \theta(E_{hk}) = 0$, donc $\theta(E_{ii}) = \theta(E_{jj})$.
Notons λ la valeur commune des $\theta(E_{ii})$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} E_{ij}$. θ étant linéaire, donc :

$$\theta(M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{ij} \theta(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} \theta(E_{ii})$$

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\theta(M) = \lambda \operatorname{tr}(M)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

•••••••••••