Devoir libre $n°3$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

Exercice

1. Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ défini par :

$$f(x, y) = (y, -x).$$

On vérifie facilement que que $f^2 = -Id_E$.

2. Si λ est une valeur propre associée au vecteur propre x, la condition $f^2(x) = -x$ entraîne que $\lambda^2 = -1$, donc il n'existe pas de valeurs propres réelles.
Si l'espace était de dimension impaire, le polynôme caractéristique serait de degré impair, et aurait une racine réelle, ce qui donnerait une valeur propre réelle, ce qui est impossible.

3. Soit $y \in \text{Vect}(x, f(x))$, alors il existe a, b des réels tels que $y = ax + bf(x)$. On a donc $f(y) = af(x) - bx \in \text{Vect}(x, f(x))$, d'où la stabilité de $\text{Vect}(x, f(x))$ par f.

4. Procédons de proche en proche. Soit e_1 un vecteur non nul de E. $f(e_1)$ n'est pas lié à e_1, puisque f est sans valeur propre. On choisit ensuite $e_2 \notin \text{Vect}(e_1, f(e_1))$. On a $f(e_2) \notin \text{Vect}(e_1, f(e_1), e_2)$, en effet, car si

$$f(e_2) = ae_1 + bf(e_1) + ce_2$$

alors

$$-e_2 = af(e_1) - be_1 + cf(e_2),$$

et en remplaçant $f(e_2)$ par $ae_1 + bf(e_1) + ce_2$, on trouverait que la famille $(e_1, f(e_1), e_2)$ est liée, ce qui est absurde. On continue ainsi pour construire e_3, etc...
Posons, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $F(e_i) = \text{Vect}(e_i, f(e_i))$. On voit que les $F(e_i)$ sont stables par f et forment une somme directe de E :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} F(e_i).$$

La matrice A de la restriction de f à chaque $F(e_i)$ s'écrit :

$$\text{A} = \text{Mat}[f, (e_i, f(e_i))] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, par stabilité, la matrice F de f dans la base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F(e_i)$, s'écrit sous forme d'une matrice d'ordre $2n$, bloc-diagonale : $F = \text{diag}(A, A, ..., A)$.

Problème

1. Si $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ sont deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $\lambda A + B = (\lambda a_{ij} + b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et

$$f(\lambda A + b) = \text{tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{ii} + b_{ii}) = \lambda \,\text{tr}(A) + \text{tr}(B) = \lambda f(A) + f(B).$$

$\ker(f)$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc c'est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $I_n \notin \ker(f)$, car $f(I_n) = \text{tr}(I_n) = n \neq 0$, donc

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) = \text{Vect}(I_n) \oplus \ker(f).$$

2. (a) Notons $C = AB$ et $D = BA$. On sait que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ et $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$.

Donc
$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$
et
$$\operatorname{tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik} = \operatorname{tr}(AB).$$

(b) Si la matrice A est semblable à la matrice B, il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Et donc
$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}((PA)P^{-1}) = \operatorname{tr}(P^{-1}(PA)) = \operatorname{tr}(P^{-1}PA) = \operatorname{tr}(A).$$

(c) Si X est solution de $AX - XA = I_n$, alors $\operatorname{tr}(AX - XA) = \operatorname{tr}(I_n) = n$. Or $\operatorname{tr}(AX - XA) = \operatorname{tr}(AX) - \operatorname{tr}(XA) = 0$. Et donc $n = 0$, ce qui est absurde. Cette équation n'admet donc pas de solutions dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

3. On a $g(E_{ij}E_{kl}) = g(E_{kl}E_{ij})$.
- si $j \neq k$ et $i = l$, on obtient $0 = g(0) = g(E_{kj})$.
- si $j = k$ et $i = l, j \neq i$, on obtient $g(E_{ii}) = g(E_{jj}) = \lambda$.

Soit maintenant $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On peut écrire
$$A = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}E_{ij}$$
et donc
$$g(A) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}g(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}g(E_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$
Or cette dernière expression est exactement $\lambda \operatorname{tr}(A)$. Donc $g = \lambda f$.

4. (a) Montrons que l'application Θ est linéaire.
$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ sont deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,
$$\Phi_{\lambda A+B}(M) = \operatorname{tr}((\lambda A + B)M) = \lambda \operatorname{tr}(AM) + \operatorname{tr}(BM) = \lambda\Phi_A(M) + \Phi_B(M) = (\lambda\Phi_A + \Phi_B)(M)$$
D'où
$$\Theta(\lambda A + B) = \lambda\Phi(A) + \Phi(B).$$
Pour montrer que l'application Θ est injective, cherchons son noyau. On a :
$$\ker\Theta = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) / \Phi_A = 0\} = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) / \operatorname{tr}(AM) = 0, \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})\}$$
Choisissons $M = E_{ij}$ et étudions les éléments de la diagonale du produit AM. En fait, le produit AE_{ij} donne
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{2i} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ni} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
et ceci pour la j-ème colonne.
Donc $\operatorname{tr}(AE_{ij}) = a_{ji} = 0$, et ceci quelles que soient les valeurs de i et j de $[\![1,n]\!]$. On obtient que $A = 0$ et donc $\ker\Theta = \{0\}$.
De plus $\dim \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) = n^2 = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^*$. L'application Θ étant injective, elle est en fait bijective et donc est un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels.

(b) Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice qui commute avec tous les éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. En particulier, $ME_{ij} = E_{ij}M$, cette équation est équivalente à

$$\begin{cases} m_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \\ m_{ii} = m_{jj} & \text{pour } 1 \leq i,j \leq n \end{cases}$$

On obtient ainsi le résultat demandé : $M = \lambda I_n$ (λ la valeur commune des m_{ii}.)

(c) Soit g une forme linéaire qui vérifie $g(MN) = g(NM)$ pour tout $(M,N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$. D'après la question a), il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $g = \Theta(A) = \Phi_A$. Donc

$$\operatorname{tr}(AMN) = \operatorname{tr}(ANM)$$

Donc $\operatorname{tr}((AM - MA)N) = 0$ pour tout $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire $AM - MA = 0$ (car Θ est bijective) et ceci pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, et donc, d'après la question précédente $A = \lambda I_n$. Finalement

$$g(M) = \operatorname{tr}(AM) = \lambda \operatorname{tr}(M).$$

5. (a) Étudions $\operatorname{tr}(BAB)$. On a $\operatorname{tr}(BAB) = \operatorname{tr}(B^2A) = \operatorname{tr}(A)$ et on aussi $AB = -BA$, donc

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(BAB) = -\operatorname{tr}(B^2A) = -\operatorname{tr}(A).$$

Et donc $\operatorname{tr}(A) = 0$.
On montre, en étudiant de façon identique $\operatorname{tr}(ABA)$, que $\operatorname{tr}(B) = 0$.

(b) Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ et x un vecteur propre associé non nul. On a $Ax = \lambda x$ et $A^2x = \lambda^2 x$ et comme $A^2 = I_4$, alors $\lambda \in \{1,-1\}$. De même $\operatorname{Sp}(B) \subset \{1,-1\}$. Mais comme la trace des matrices A et B est nulle, on conclut que les valeurs propres de ces deux matrices sont exactement 1 et -1.

(c) $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A et de B, et comme $X^2 - 1$ est scindé à racines simples alors les deux matrices sont diagonalisables.

(d) Puisque $\operatorname{Sp}(A) = \{-1,1\}$ et $\operatorname{tr}(A) = 0$, alors $\chi_A(X) = (X+1)^2(X-1)^2$. De plus A est diagonalisable, donc $\dim E_{-1}(A) = \dim E_1(A) = 2$. Soit donc (e_1,e_2) une base du sous-espace propre $E_1(A)$ et (e_3,e_4) une base du sous-espace propre $E_{-1}(A)$. On a, pour tout $i \in [\![1,4]\!]$,

$$AB(e_i) = -BA(e_i) = -\lambda B(e_i)$$

et donc $B(e_i)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $-\lambda$.
La matrice de B s'écrit, dans la base (e_1,e_2,e_3,e_4)

$$\begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix}$$

Or, en calculant B^2, on trouve

$$B^2 = \begin{pmatrix} CD & 0 \\ 0 & DC \end{pmatrix} = I_4$$

et donc $D = C^{-1}$.
D'après la forme de la matrice B, les deux matrices ne peuvent diagonalisables dans une même base.

6. (a) Soit N une matrice nilpotente. On sait que 0 est la seule valeur propre possible (voir cours). Ainsi N est semblable à une matrice triangulaire T ayant tous ses éléments diagonaux nuls et donc, pour $j \in \mathbb{N}^*$, N^j est semblable à T^j. Or les éléments diagonaux de T^j sont les puissances j-ièmes des éléments diagonaux de T, et sont donc tous nuls. On obtient ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$

$$\operatorname{tr}(N^j) = \operatorname{tr}(T^j) = 0.$$

(b) Réciproquement, supposons que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr}(N^j) = 0$. Supposons que les valeurs propres de N ne soient pas toutes nulles. Notons donc $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ les valeurs propres distinctes et non nuls de

N. On supposera que la valeurs propre λ_i est répétée $m_i \geq 1$ fois. Les éléments diagonaux de T étant $\{0, \lambda_1, ..., \lambda_k\}$, pour $j \in \mathbb{N}^*$, les éléments diagonaux de T^j sont $\{0, \lambda_1^j, ..., \lambda_k^j\}$ et

$$\operatorname{tr}(N^j) = \operatorname{tr}(T^j) = \sum_{i=1}^{k} m_i \lambda_i^j = 0$$

Pour $1 \leq j \leq k$, on obtient un système de k équations dont les k inconnues sont $\{m_1, m_2, ..., m_k\}$.

$$\begin{cases} m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + ... + m_k\lambda_k = 0 \\ m_1\lambda_1^2 + m_2\lambda_2^2 + ... + m_k\lambda_k^2 = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ m_1\lambda_1^k + m_2\lambda_2^k + ... + m_k\lambda_k^k = 0 \end{cases}$$

La matrice de ce système est la matrice de Van Der Monde :

$$V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \dots & \lambda_k^k \end{pmatrix}$$

qui est une matrice inversible, car les λ_i sont tous distincts. Or le vecteur

$$X = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_k \end{pmatrix}$$

vérifie $VX = 0$, ce qui est impossible, sauf si c'est le vecteur nul. Toutes les valeurs propres de N sont donc nulles. Les éléments diagonaux de T sont donc tous nuls.
Appelons f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice associée T dans une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$. Notons V_k le sous-espace vectoriel engendré par les k premiers vecteurs de base $(e_1, e_2, ..., e_k)$.
D'après la forme de la matrice T, on a

$$f(V_1) = \{0\}, \quad f(V_k) \subset V_{k-1}$$

pour $2 \leq k \leq n$. Et par récurrence, $f^n = 0$. Ainsi la matrice N est nilpotente.

(c) Montrons par récurrence que

$$A^kB - BA^k = kA^k$$

Ceci est vrai pour $k = 1$, et supposons notre hypothèse vérifiée pour $k = n$. Alors
- $A^{n+1}B - ABA^n = nA^{n+1}$.
- $AB - BA = A \Rightarrow ABA^n - BA^{n+1} = A^{n+1}$,

et donc

$$A^{n+1}B - BA^{n+1} = (n+1)A^{n+1}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 0$

$$0 = \operatorname{tr}(A^nB - BA^n) = n\operatorname{tr}(A^n)$$

La matrice A est donc nilpotente d'après la question précédente.

(d) Remarquons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A(AB - BA)^n = (AB - BA)^n A$$

En effet, ceci est vérifie pour $n = 1$, d'après notre hypothèse, et si c'est vérifié pour k, alors

$$\begin{aligned} A(AB-BA)^{k+1} &= A(AB-BA)^k(AB-BA) \\ &= (AB-BA)^k A(AB-BA) \\ &= (AB-BA)^k(AB-BA)A = (AB-BA)^{k+1}A \end{aligned}$$

Utilisons la même technique que dans la question précédente. Calculons

$$\begin{aligned} (AB-BA)^{n+1} &= (AB-BA)^n(AB-BA) \\ &= A(AB-BA)^nB-(AB-BA)^nBA \\ &= A[(AB-BA)^nB]-[(AB-BA)^nB]A \\ &= AC-CA \end{aligned}$$

Avec $C=(AB-BA)^nB$. On a $\mathrm{tr}(AC-CA)=0$, et pour tout $n\geq 1$, $\mathrm{tr}(AB-BA)^n=0$. La matrice $AB-BA$ est donc nilpotente.

•••••••••••