Devoir libre $n°4$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

On remarquera que

$$V(X)=\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

et donc $v(X)$ est le déterminant de Van der Monde associé à $x_1, x_2, ..., x_n$.

1. Lorsque l'on remplace X par λX, la j-ième colonne de $V(X)$ est multipliée par λ^{j-1}. Donc, par multilinéarité du déterminant,

$$v(\lambda X)=\lambda.\lambda^2...\lambda^{n-1}v(X)=\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}v(X).$$

2. Si $X=0$, on peut choisir Y quelconque de norme 1, par exemple $(1,0,...,0)$, sinon, le vecteur unitaire $Y=\dfrac{X}{\|X\|_\infty}$ convient.
D'après la question précédente, on a alors

$$v(X)=(\|X\|_\infty)^{\frac{n(n-1)}{2}}v(Y).$$

3. D'après la formule du déterminant de Vandermonde, la fonction v est polynomiale, et donc continue sur $\mathbb{C}^n$, à valeurs dans $\mathbb{C}$. Par composition avec la fonction module, qui est continue sur $\mathbb{C}$, $X\mapsto |v(X)|$ est continue sur $\mathbb{C}^n$.
La sphère unité S_n est une fermée-bornée de $\mathbb{C}^n$, donc est une partie compacte de $\mathbb{C}^n$. D'après le théorème des bornes atteintes, l'application $X\mapsto |v(X)|$ admet un maximum ρ sur S_n.

4. Soit $X\in\mathbb{C}^n$. Avec les notations de la question 2, on a $|v(X)|=(\|X\|_\infty)^{\frac{n(n-1)}{2}}|v(Y)|$. Or $Y\in S_n$, et donc $|v(Y)|\leq\rho$ par définition de ρ. Ainsi

$$v(X)\leq\rho(\|X\|_\infty)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

5. Si $X=(x_1,x_2)$ est un vecteur de $\mathbb{C}^2$, $X\in S_2$ si et seulement si l'une de ses composantes a un module égal à 1 et l'autre a un module inférieur ou égal à 1. Pour un tel vecteur,

$$v(X)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1$$

et $|v(X)|=|x_2-x_1|\leq|x_2|+|x_1|\leq 2$. La valeur 2 est atteinte, par exemple pour $X=(1,-1)$, donc $\rho=2$.
Si, pour $X\in S_2$, on a $|v(X)|=2$, alors $|x_1|+|x_2|=2$ d'après les inégalités précédentes. Sachant que $|x_1|\leq 1$ et $|x_2|\leq 1$, cela entraîne $|x_1|=|x_2|=1$.
On a aussi $|x_2+(-x_1)|=|x_2|+|-x_1|$, c'est-à-dire que l'on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire appliquée à x_2 et $-x_1$. Sachant de plus que $x_1\neq 0$, il existe donc $k\in\mathbb{R}^+$ tel que $x_2=k(-x_1)$. Enfin, on a $|x_1|=|x_2|=1$, d'où $k=1$ et $x_2=-x_1$. Le vecteur X doit donc être de la forme $\mu(1,-1)$, avec $\mu\in\mathbb{C}$ tel que $|\mu|=1$. Le vecteur $X_1=(1,-1)$ convient.
Réciproquement, un vecteur X de la forme précédente appartient à S_2 et

$$|v(X)|=|-\mu-\mu|=|2?|=2|\mu|=2=\rho.$$

Finalement, les vecteurs $X\in S_2$ tels que $|v(X)|=\rho$ sont les vecteurs de la forme $(\mu,-\mu)$ avec $\mu\in\mathbb{C}$ quelconque de module 1. Ils sont tous proportionnels à $(1,-1)$.

6. On sait que si $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$v(X) = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

(formule du déterminant de Vandermonde). Or, si $\|X\| = 1$, on a $|x_j - x_i| \leq |x_j| + |x_i| \leq 2$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. De plus, il existe exactement $\dfrac{n(n-1)}{2}$ couples (i, j) d'entiers de $[\![1, n]\!]^2$ tels que $i < j$. On a donc

$$\rho \leq 2^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

7. (a) Pour tout $(p, q) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient $a_{p,q}$ de la matrice $V(\Omega)$ est

$$ap, q = (w_p)^{q-1} = e^{\frac{2i(p-1)(q-1)\pi}{n}}.$$

Le coefficient $b_{p,q}$ de la matrice $\overline{V(\Omega)}V(\Omega)$ est donc

$$\begin{aligned} b_{p,q} &= \sum_{k=1}^{n} \overline{a_{p,k}} a_{k,q} \\ &= \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{-2i(p-1)(k-1)\pi}{n}} e^{\frac{2i(k-1)(q-1)\pi}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2i(k-1)(q-1-p+1)\pi}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{2i(q-p)\pi}{n}}\right)^k. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une somme de termes d'une suite géométrique de raison $w = e^{2i(q-p)\pi/n}$, or $w = 1$ si et seulement si $\dfrac{q-p}{n}$ est un entier relatif. Sachant que p et q sont compris entre 1 et n, c'est le cas si et seulement si $p = q$, et dans ce cas $b_{p,q} = n$. Si $p \neq q$, on a

$$b_{p,q} = \frac{1 - w^n}{1 - w} = 0,$$

car w est une racine n-ième de l'unité. Finalement, $\overline{V(\Omega)}V(\Omega) = nI_n$.

(b) D'après la question précédente, $\det\left(\overline{V(\Omega)}\right) \det(V(\Omega)) = \det(nI_n) = n^n$. Or

$$\det\left(\overline{V(\Omega)}\right) = \overline{\det\left(V(\Omega)\right)}$$

(on peut prouver cette propriété par récurrence sur l'ordre des matrices, à partir de la formule de développement par rapport aux colonnes par exemple). On obtient donc

$$|v(\Omega)| = |\det(V(\Omega))| = n^{\frac{n}{2}}.$$

(c) Les nombres complexes $w_1, ..., w_n$ sont de module 1, donc $\Omega \in S_n$. Par définition de ρ, on a donc

$$\rho \geq |v(\Omega)| = n^{\frac{n}{2}}.$$

• • • • • • • • • • •