Devoir libre $n°5$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

Théorème du point fixe et applications

1. *L'unicité :* Supposons que f admet deux points fixes x et y. On a $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\| \leq k\|x-y\|$. Donc $(1-k)\|x-y\| \leq 0$ avec $1-k>0$, donc $\|x-y\|=0$ et $x=y$.
L'existence : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|x_{n+1}-x_n\| = \|f(x_{n+1})-f(x_{n-1})\| \leq k\|x_n - x_{n-1}\|,$$

et donc par récurrence $\|x_{n+1}-x_n\| \leq k^n\|x_1-x_0\|$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|x_{n+p}-x_n\| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1}\|x_{i+1}-x_i\| \leq \|x_1-x_0\|\sum_{i=n}^{n+p-1}k^i,$$

en utilisant l'inégalité précédente. $k \in [0,1[$ on obtient une série géométrique convergente, et donc :

$$\|x_{n+p}-x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1-x_0\|$$

inégalité qui prouve que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy de A, donc convergente vers a dans A (A est complète).
f étant continue, passant donc à la limite dans $x_{n+1}=f(x_n)$, on trouve $a=f(a)$. Ce point fixe est unique d'après ce qui précède.

Remarque : $a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0)$.

2. $f :]0,1] \to]0,1], x \mapsto \dfrac{x}{2}$ ne possède pas de point fixe : $]0,1]$ n'est pas un complet.

3. Si f^q est contractante, elle admet un point fixe a tel que

$$a = \lim_{n\to\infty}(f^q)^n(f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f^{nq+1}(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} f^{nq}(x_0)) = f(a).$$

f admet donc un point fixe.

4. APPLICATION :

(a) La relation de récurrence $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{v_n}$ s'écrit sous la forme $v_{n+1} = f(v_n)$, avec $f : x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$. f conserve l'intervalle $[1,2]$ ($f([1,2]) = \left[\dfrac{3}{2}, 2\right] \subset [1,2]$) et contractante sur cette intervalle (utiliser le théorème des accroissements finis), donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, l'unique point fixe de f sur l'intervalle $[1,2]$.

(b) i. Les droites (MP_M) et $(M'P_{M'})$ sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès, appliqué dans le triangle (MP_MC) , on a

$$\frac{P_MP_{M'}}{MM'} = \frac{P_MC}{MC} = |\cos c|$$

ii. Si $M \neq M'$, alors $P_M \neq P_{M'}$ et $Q_M \neq Q'_M$, en considérant les triangles (AP_MQ_M) et (BQ_MR_M) on aura aussi :

$$\frac{Q_MQ_{M'}}{P_MP_{M'}} = |\cos a| \quad \text{et} \quad \frac{R_MR_{M'}}{Q_MQ_{M'}} = |\cos b|$$

Donc $R_MR_{M'} = |\cos a||\cos b||\cos c|MM' \leq kMM'$ avec $k = |\cos a||\cos b||\cos c| \in [0,1[$ (car $a,b,c \in]0,\pi[$), cette inégalité se traduit à l'aide de φ par l'inégalité :

$$|\varphi(x)-\varphi(x')| \leq k|x-x'|,$$

autrement dit, la fonction φ est une contraction stricte, donc admet un point fixe unique x, c'est-à-dire il existe un unique point M d'abscisse x tel que $M = R_M$.

(c) Considérons l'espace vectoriel $E = \mathscr{B}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$, et $A = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On sait que $(E,\|.\|_\infty)$ est un espace complet et que A est un fermé de E [1], donc il est complet.
D'autre part, l'unique point fixe de T, s'il existe, est l'unique solution de l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}) \quad \begin{cases} y' = \sin(xy) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad ,$$

en effet, f solution de $(\mathscr{E})$ si, et seulement si, (par intégration) $T(f) = f$. Donc pour conclure, il suffit de montrer que l'application T est contractante.
D'abord l'application T est bien définie de A dans A, en effet, si $f \in A$, par opération, $T(f)$ est continue sur $[0,1]$ et donc $T(f) \in A$.
Pour tout $x \in [0,1]$ et $f, g \in A$, on a :

$$\begin{aligned} |T(f)(x) - T(g)(x)| &= \left|\int_0^x [\sin(tf(t)) - \sin(tg(t))]\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_0^1 |\sin(tf(t)) - \sin(tg(t))|\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^1 |t(f(t) - g(t))|\mathrm{d}t \\ &\leq \|f-g\|_\infty \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\|f-g\|_\infty \end{aligned}$$

D'où $\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \|f-g\|_\infty$. Ainsi T est une application contractante, donc elle admet un point fixe, qui est l'unique solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$.

5. Pour tout $x \in [0,1]$ et $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} (T\circ T)(f)(x) &= 1 + \int_0^x Tf(t-t^2)\mathrm{d}t \\ &= 1 + \int_0^x \left(1 + \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t \\ &= 1 + x + \int_0^x \int_0^{t-t^2} f(u-u^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

De plus $[(T\circ T)(f)]'(x) = 1 + \displaystyle\int_0^{x-x^2} f(u-u^2)\mathrm{d}u$. En remarquant que pour $t \in [0,1]$, $t - t^2 \leq \dfrac{1}{4}$, on montre

1. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui sur $[0,1]$ qui converge vers g pour la norme $\|.\|_\infty$. Montrons que $g \in A$. Soit $\varepsilon > 0$, $\forall x_0, x \in [0,1]$, on a :

$$|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - g_n(x) + g_n(x) - g_n(x_0) + g_n(x_0) - g(x_0)|,$$

d'où

$$|g(x) - g(x_0)| \leq |g(x) - g_n(x)| + |g_n(x) - g_n(x_0)| + |g_n(x_0) - g(x_0)|.$$

Comme la convergence est uniforme, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \geq n_0$,

$$|g(x) - g_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |g(x_0) - g_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Fixons maintenant n en prenant par exemple $n = n_0$ de façon que les deux dernières inégalités soient vérifiées. Alors, la fonction g_n étant continue au point x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |g_n(x) - g_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc, en posant $|x - x_0| < \alpha$, il est certain que

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \varepsilon$$

ce qui montre la continuité de g au point x_0, et donc $g \in A$.

que

$$|(T \circ T)(f)(x) - (T \circ T)(g)(x)| \leq \frac{1}{4}\|f - g\|_\infty$$

et que

$$|[(T \circ T)(f)]'(x) - [(T \circ T)(g)]'(x)| \leq \frac{1}{4}\|f - g\|_\infty.$$

Donc

$$\|(T \circ T)(f) - (T \circ T)(g)\| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|.$$

Donc $T \circ T$ est une contraction et $(E, \|.\|)$ est complet[2] donc $T \circ T$ admet un unique point fixe, donc T admet un unique point fixe.
Remarquons que $Tf = f$ est équivalent à $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x - x^2)$. Donc l'existence et l'unicité du point fixe pour T donne l'existence et l'unicité de la solution au problème posé.

6. Remarquons que l'endomorphisme $Id_E - u$ est inversible si, et seulement si, $\forall y \in E$, l'équation en x :

$$y = x - u(x)$$

admet une solution et une seule. Soit $y \in E$ fixé. considérons l'application de E dans E définie par :

$$f_y(x) = y + u(x)$$

On a, pour tout $x, x' \in E$,

$$\|f_y(x) - f_y(x')\| = \|u(x - x')\| \leq \|\|u\|\|.\|x - x'\|$$

Donc f_y est $\|\|u\|\|$-contractante et comme E est complet, alors f_y admet un point fixe unique x, ce point fixe est évidement l'unique solution de l'équation $y = x - u(x)$.
De plus, pour tout $x_0 \in E$, $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ avec $x_1 = y + u(x_0)$, $x_2 = y + u(x_1) = y + u(y) + u^2(x_0)$, puis par récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \sum_{k=0}^{n-1} u^k(y) + u^n(x_0).$$

Comme $\|u^n(x_0)\| \leq \|\|u\|\|^n \|x_0\|$ et $\|\|u\|\| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} u^n(x_0) = 0$. D'où :

$$x = (Id_E - u)^{-1}(y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(y) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k(y).$$

Par conséquent $(Id_E - u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u^n$.

Ouverts-fermés d'un connexe par arcs

1. Il est clair que X est une partie non vide ($0 \in X$) bornée de $[0,1]$ donc α est bien défini, de plus $X = [0,1] \cap \gamma^{-1}(P)$ est une fermé $[0,1]$, comme $[0,1]$ est fermé de $\mathbb{R}$, alors X est un fermé de $\mathbb{R}$, donc $\alpha \in X$.
Supposons $\alpha < 1$, donc $\forall t \in]\alpha, 1]$, $\gamma(t) \notin P$ (en particulier $A \setminus P \neq \emptyset$). Posons donc $Y = \{t \in [0,1]/\gamma(t) \in A \setminus P\}$. P étant un ouvert de A, donc $A \setminus P = A \cap P^C$ est un fermé de A et comme X, Y est un fermé de $\mathbb{R}$.
On a donc $X \cup Y = [0,1]$ et $X \cap Y = \emptyset$. Or $]\alpha, 1] \subset Y$ donc $\overline{]0,1]} \subset \overline{Y} = Y$, c'est-à-dire $[\alpha, 1] \subset Y$ et donc $\alpha \in X \cap Y$, ce qui absurde. Donc nécessairement $\alpha = 1$.

2. D'après ce qui précède, $b = \gamma(1) \in P$ et ceci pour tout $b \in P$, donc $P = A$. Ainsi la seule partie ouverte-fermée non vide de A est A.

3. Les ouverts-fermés de E sont le vide et E.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|$. Pour tout $t \in [0,1]$, $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc converge. Notons $f(t)$ sa limite. De même $(f'_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ donc converge vers $g(t)$. Nous allons montrer que f est dans E et que f_n converge vers f pour la norme $\|.\|$ et que $f' = g$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p > 0$, $\|f_n - f_{n+p}\| < \varepsilon$. En faisant tendre p vers $+\infty$, pour tout $t \in [0,1]$, $f_{n+p}(t)$ converge vers $f(t)$. On obtient que $\|f_n - f\|_\infty$ et que $\|f'_n - g\|_\infty$ tendent vers 0. Donc f_n converge vers f pour la norme $\|\|\|_\infty$. Comme les f_n sont continues alors f est continue (question 4.c). De même f'_n converge vers g pour la norme $\|.\|_\infty$, donc g est continue. De plus cela implique que $g = f'$. Nous avons donc montrer que $\|f_n - f\|$ tend vers 0 et que f est dans E. Donc $(E, \|.\|)$ est complet.