Devoir libre $n°6$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

Partie I. Etude de deux exemples

1. (a) D'après la formule du binôme, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k = (1+1)^n = 2^n.$$

(b) On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n^* = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k \alpha = \dfrac{\alpha}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k = \alpha.$

(c) Comme $\alpha \neq 0$, les séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^*$ sont grossièrement divergentes.

2. (a) Toujours d'après la formule du binôme, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n^* = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k z^k = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n.$$

(b) On suppose que $|z| < 1$.

i. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait calculer les sommes géométriques. La raison z étant différente de 1, donc

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Pour $|z| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z^n = 0$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(z) = \frac{1}{1-z}$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge et

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

ii. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'après l'inégalité triangulaire $|a_n^*| = \left|\dfrac{z+1}{2}\right| \leq \dfrac{1+|z|}{2} < 1$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$ est donc une série géométrique de somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2S(z).$$

(c) i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n \geq |z| \geq 1$ donc $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ diverge.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^* = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$, d'après la question 2.a. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$ est une serie géométrique de raison $\dfrac{-1}{2}$, donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$ converge.

iii. D'après la question 2.a, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n^* = \left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right)^n$. Ainsi, $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $r = \frac{1+e^{i\theta}}{2} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$. Ainsi, $|r| = \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$. Comme $\theta \in]-\pi, 0[\cup]0,\pi[$, $|r| \in]0,1[$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$ converge. De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* &= \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\left(\frac{1+e^{i\theta}}{2}\right)} \\
&= \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{2}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{2}{-2ie^{i\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{ie^{-i\frac{\theta}{2}}}{\sin\frac{\theta}{2}} = 1 + i\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Partie II : Etude du procede de sommation

1. Comparaison des convergences des deux suites

(a) i. On a $\mathtt{C}_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$, car pour tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, $n - p \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{n^k}{2^n k!} = \frac{e^{k\ln(n) - n\ln(2)}}{k!} = \frac{e^{-n\ln(2)\left(1-k\frac{\ln(n)}{\ln(2)n}\right)}}{k!}$. On a $\lim_{n\to\infty}\left(1 - k\frac{\ln(n)}{\ln(2)n}\right) = 1$, donc $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{2^n k!} = 0$. Par équivalence, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\mathtt{C}_n^k = 0$.

(b) D'après la question précédente, pour tout $k \in [\![0, n_0]\!]$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\mathtt{C}_n^k = 0$. Ainsi, n_0 étant fixé, $S_{n_0}(n)$ est alors une somme finie de termes de limite nulle et donc

$$\lim_{n\to\infty} S_{n_0}(n) = 0.$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle, il existe un rang $n_0 > 0$ tel que pour tout $k \geq n_0$, $|a_k| \leq \varepsilon$.
Soit $n \geq n_0$. En sommant les inégalités précédentes pour k allant de n_0 à n, on a :

$$\sum_{k=n_0}^{n} \mathtt{C}_n^k \frac{|a_k|}{2^n} \leq \sum_{k=n_0}^{n} \mathtt{C}_n^k \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \frac{\varepsilon}{2^n}\sum_{k=n_0}^{n} \mathtt{C}_n^k \leq \frac{\varepsilon}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\mathtt{C}_n^k = \varepsilon$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}
|a_n^*| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k \frac{a_k}{2^n}\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} \mathtt{C}_n^k \frac{a_k}{2^n}\right| + \left|\sum_{k=n_0}^{n} \mathtt{C}_n^k \frac{a_k}{2^n}\right| \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} \mathtt{C}_n^k \frac{a_k}{2^n}\right| + \sum_{k=n_0}^{n} \mathtt{C}_n^k \frac{|a_k|}{2^n} \\
&\leq \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} \mathtt{C}_n^k \frac{a_k}{2^n}\right| + \varepsilon
\end{aligned}$$

La suite $(S_{n_0-1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant de limite nulle, d'après la question précédente, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1$, $|S_{n_1-1}(n)| \leq \varepsilon$. On a alors

$$\forall n \geq \max(n_0, n_1),\ \ |a_n^*| \leq 2\varepsilon$$

On a donc montré que

$$\lim_{n\to\infty} a_n^* = 0.$$

(d) On a

$$a_n^* - l = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \complement_n^k (a_k - l)$$

car $\displaystyle\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \complement_n^k = 1$. On se ramène ainsi au cas précédent ($a_n - l \to 0$). Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n^* - l) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n^* = l$.

(e) Si $a_n = (-2)^n$ alors $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite nulle (car $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left|\frac{-1}{2}\right| < 1$) alors que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente. Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Comparaison des convergences des séries $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$

(a)

$$\begin{aligned}
U_0 &= \sum_{k=0}^{0} a_k^* = a_0^* = a_0 = S_0 \\
U_1 &= 2\sum_{k=0}^{1} a_k^* = 2a_0^* + 2a_1^* = 2a_0 + \sum_{k=0}^{1} a_k = 2S_0 + S_1 \\
U_2 &= 4\sum_{k=0}^{1} a_k^* = 4a_0^* + 4a_1^* + 4a_2^* \\
&= 4a_0 + 2\sum_{k=0}^{1} a_k + \sum_{k=0}^{2} \complement_n^k a_k = 4a_0 + 2(a_0 + a_1) + (a_0 + 2a_1 + a_2) = (a_0 + a_1 + a_2) + 3(a_1 + a_0) + 3a_0 \\
&= S_2 + 3S_1 + 3S_0
\end{aligned}$$

(b) La formule est vraie pour $n = 0$ d'après la question précédente car $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \complement_1^{k+1} S_k = S_0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la formule soit vraie au rang n. On remarque que

$$U_{n+1} = 2^{n+1}T_{n+1} = 2^{n+1}(T_n + a_{n+1}^*) = 2U_n + 2^{n+1}a_{n+1}^*$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$U_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n} \complement_{n+1}^{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \complement_{n+1}^{k} a_k.$$

On utilise alors la remarque de l'énoncé pour exprimer a_k à l'aide de S_k et S_{k-1}. Ainsi,

$$U_{n+1} = 2\sum_{k=0}^{n} \complement_{n+1}^{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \complement_{n+1}^{k} (S_k - S_{k-1})$$

En réordonnant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= 2\sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_{n+1}^{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \mathtt{C}_{n+1}^{k} S_k - \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_{n+1}^{k+1} S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_{n+1}^{k+1} S_k + \sum_{k=0}^{n+1} \mathtt{C}_{n+1}^{k} S_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\mathtt{C}_{n+1}^{k+1} + \mathtt{C}_{n+1}^{k}\right) S_k + S_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_{n+2}^{k+1} S_k + S_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \mathtt{C}_{n+2}^{k+1} S_k
\end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$. Par principe de récurrence, on peut conclure que la formule est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :

$$U_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathtt{C}_{n}^{k+1} S_k = \sum_{k=1}^{n} \mathtt{C}_{n}^{k+1} S_{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_{n}^{k+1} v_k = 2^n v_n^*,$$

car $S_{-1} = 0$.

(b) On sait que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons S sa limite. On sait alors que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S. D'après la question 1.d, on peut alors en déduire que la suite $(v_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{U_n}{2^n} = 2\dfrac{U_n}{2^{n+1}} = 2v_{n+1}^* \to 2S$. On peut donc conclure que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^* = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

4. Si $a_n = (-2)^n$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ diverge alors que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$ converge (cf question 2.c.ii). Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^*$ ne sont donc pas toujours même nature.

• • • • • • • • • • •