Devoir libre $n°7$
Correction

Source : `https://concours-maths-cpge.fr/`

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

Première partie

1. (a) On vérifie aisément que Δ est bien une application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$, car pour tout polynôme P, $\Delta(P)$ est bien un polynôme, et qu'elle est linéaire :

$$\forall (P,Q) \in \mathscr{P}^2 \, , \, \forall \lambda \in \mathbb{R} \, , \, \Delta(\lambda P + Q) = \lambda \Delta(P) + \Delta(Q).$$

Donc Δ est un endomorphisme de $\mathscr{P}$.

(b) Soit $P \in \mathscr{P}$ de degré $r > 0$. Il existe donc des réels $a_0, a_1, \ldots, a_r$, avec $a_r \neq 0$, tels que $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$.

On aura alors $\Delta(P) = \sum_{k=0}^{r} a_k \left[(X+1)^k - X^k \right] = \sum_{k=1}^{r} a_k \left[(X+1)^k - X^k \right]$, les termes constant se simplifiant.

Or, d'après la formule du binôme, pour tout $k \geq 1$, $(X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{C}_i^k X^i$ est un polynôme de degré exactement $k-1$. Puisque $a_r \neq 0$, le degré de $\Delta(P)$ est donc égal à $r-1$.

(c)
- Il est clair que, si P est un polynôme constant, $\Delta(P) = 0$, c'est à dire $P \in \ker \Delta$;
- et, d'après la question précédente, si P n'est pas constant, donc de degré $r \geq 1$, $\Delta(P)$ ne peut être nul, car de degré $r-1$.

En conclusion, $\ker \Delta$ est exactement l'ensemble des polynômes constants, $\mathscr{P}_0$.

2. (a) Si $P \in \mathscr{P}_r$, alors $\deg(P) \leq r$ et $\Delta(P)$ est de degré inférieur ou égal à $r-1$. Ainsi, $\Delta(\mathscr{P}_r) \subset \mathscr{P}_{r-1} \subset \mathscr{P}_r$; le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}_r$ étant stable par Δ, on peut donc considérer l'endomorphisme Δ_r induit par Δ sur $\mathscr{P}_r$. Δ_r est donc un endomorphisme de $\mathscr{P}_r$.

(b) De façon immédiate : $\ker \Delta_r = \ker \Delta \cap \mathscr{P}_r = \ker \Delta = \mathscr{P}_0$.

(c) On a déjà vu à la question 2.a que $\operatorname{Im} \Delta_r \subset \mathscr{P}_{r-1}$. On vient aussi de voir que $\dim \ker \Delta_r = \dim \mathscr{P}_0 = 1$; d'après le théorème du rang, on aura donc

$$\dim \operatorname{Im} \Delta_r = \dim \mathscr{P}_r - \dim \ker \Delta_r = (r+1) - 1 = r = \dim \mathscr{P}_{r-1} \, .$$

Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} \Delta_r$ et $\mathscr{P}_{r-1}$ étant inclus l'un dans l'autre et de même dimension, ils sont égaux : $\operatorname{Im} \Delta_r = \mathscr{P}_{r-1}$.

(d) Soit Q un polynôme quelconque.
- Si $Q = 0$, on a $Q = \Delta(0)$;
- sinon, il existe $r \geq 1$ tel que $Q \in \mathscr{P}_{r-1}$. D'après la question précédente, Q appartient à l'image de Δ_r, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \mathscr{P}_r$ tel que $Q = \Delta_r(P) = \Delta(P)$.

Dans les deux cas, on a prouvé l'existence d'un antécédent à Q par Δ, donc Δ est surjective de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$.

3. Notons φ l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout polynôme P associe sa valeur en 0, $P(0)$.φ est trivialement une forme linéaire sur $\mathscr{P}$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est alors l'ensemble des polynômes P tels que $\varphi(P) = 0$, c'est-à-dire le noyau de φ.

Il en résulte que $\mathcal{E}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}$, mais surtout que c'est un *hyperplan* de $\mathscr{P}$. D'après le cours, toute droite vectorielle qui n'est pas incluse dans cet hyperplan en est un supplémentaire. C'est le cas de $\mathscr{P}_0$ (ensemble des polynômes constants), donc on a

$$\mathscr{P} = \mathcal{E} \oplus \mathscr{P}_0 \,.$$

Soit $P \in \varepsilon \cap \mathscr{P}$ tel que $\triangle\,(P) = 0$, donc P est un polynôme constant et $P(0) = 0$ alors P est nul et donc la restriction de $\triangle$ à ε est un isomorphisme.

4. (a) Notons u la restriction de Δ à $\mathcal{E}$. On vient donc d'établir que

$$\begin{aligned} u: \ \mathcal{E} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ P &\longmapsto \Delta(P) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La propriété de l'énoncé : « $N_n(0) = 0$ et $\Delta(N_n) = N_{n-1}$ »est équivalente à : « $N_n \in \mathcal{E}$ et $u(N_n) = N_{n-1}$ ». ou encore à « N_n est l'antécédent de N_{n-1} par u ».

La suite N_n est donc *la* suite définie par récurrence par

$$N_0 = 1 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ N_n = u^{-1}(N_{n-1})\,.$$

(b) En écrivant $P_n = \dfrac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$ on a $P_n(0 = 0$ et

$$\begin{aligned} \Delta(P_n) = P_n(X+1) - P_n(X) &= \frac{(X+1)X(X-1)\dots(X-n+2)}{n!} - \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!} \\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{n!}\underbrace{\big[(X+1)-(X-n+1)\big]}_{=n} \\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{(n-1)!} = P_{n-1} \end{aligned}$$

Par unicité de la suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a bien $N_n = P_n$.

(c)

- La famille de polynômes $(N_n)_{n\in[0,r]}$ est une famille de polynômes de degrés distincts (puisque $\deg(N_n) = n$ pour tout n). D'après un résultat du cours, elle est donc libre.
  De plus, il s'agit d'une famille de $r+1$ éléments de l'espace vectoriel $\mathscr{P}_r$ qui est de dimension $r+1$. Donc la famille $(N_n)_{n\in[0,r]}$ est une base de $\mathscr{P}_r$.
- La famille de polynômes $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre car formée de polynômes de degrés distincts.
  De plus, si P est un polynôme quelconque de $\mathscr{P}$, il existe r entier tel que $P \in \mathscr{P}_r$. D'après le résultat précédent, P sera donc combinaison linéaire des N_n pour $0 \le n \le r$, donc a fortiori des N_n pour $n \in \mathbb{N}$.
  Cela signifie que la famille $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathscr{P}$ et par suite $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathscr{P}$.

(d)

- Soit Q de degré $\le r$. Puisque $(N_n)_{n\in[0,r]}$ est une base de $\mathscr{P}_r$, il existe des coefficients réels $a_0, a_1, \dots, a_r$ tels que

$$Q = \sum_{n=0}^{r} a_n N_n.$$

  Pour tout entier $k \in [0, r]$ on aura alors, par linéarité

$$\Delta^k(Q) = \sum_{n=0}^{r} a_n \Delta^k(N_n) \quad (1)$$

Mais $\Delta(N_0) = 0$ et $\Delta(N_n) = N_{n-1}$ si $n \geq 1$, donc par une récurrence facile on a

$$\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ \Delta^k(N_n) = \begin{cases} N_{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En reportant dans (1) on obtient

$$\Delta^k(Q) = \sum_{n=k}^{r} a_n N_{n-k} = a_k + \sum_{n=k+1}^{r} a_n N_{n-k}\,.$$

Puisque $N_i(0) = 0$ si $i \geq 1$, en appliquant cette dernière relation en 0 il vient : $\Delta^k(Q)(0) = a_k$ donc on a bien

$$\forall Q \in \mathscr{P}_r\ ,\ Q = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n(Q)(0) N_n\,.$$

- Puisque $\Delta^n(Q) = 0$ dès que n est strictement supérieur au degré de Q, on pourra donc écrire :

$$\forall Q \in \mathscr{P}\ ,\ Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n(Q)(0) N_n$$

les termes de cette somme étant tous nuls à partir d'un certain rang.

(e) Soit $P \in \mathscr{P}$; on a aussi $P = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Delta^n(P)(0) N_n$ donc

$$\Delta(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n(P)(0)\Delta(N_n) \underbrace{=}_{\substack{\text{car} \\ \Delta(N_0)=0}} \sum_{n=1}^{+\infty} \Delta^n(P)(0) N_{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^{n+1}(P)(0) N_n$$

La famille (N_n) étant libre, l'égalité $\Delta(P) = Q$ est donc équivalente à

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \Delta^{n+1}(P)(0) = \Delta^n(Q)(0)$$

ou encore à

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \Delta^n(P)(0) = \Delta^{n-1}(Q)(0)$$

Les polynômes tels que $\Delta(P) = Q$ sont donc les polynômes de la forme $P = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Delta^{n-1}(Q)(0) N_n$ avec a_0 constante réelle quelconque.

(f)
- Si $\Delta(P) = Q$ on aura

$$\sum_{k=0}^{n} Q(k) = \sum_{k=0}^{n} \big[P(k+1) - P(k)\big] = P(n+1) - P(0)\,.$$

- On prend ici $Q = X^2$. Puisque $N_1 = X$ et $N_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$ on a $Q = 2N_2 + N_1$. D'après les calculs précédents, un polynôme P tel que $\Delta(P) = Q$ sera par exemple

$$P = 2N_3 + N_2 = \frac{1}{3}X(X-1)(X-2) + \frac{1}{2}X(X-1) = \frac{1}{6}X(X-1)(2X-1)\,.$$

On aura donc

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} Q(k) = P(n+1) - P(0) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\,.$$

5. Notons T l'endomorphisme de $\mathscr{P}$ défini par

$$\forall P \in \mathscr{P} \ , \ T(P) = P(X+1)$$

de sorte que $\Delta = T - \mathrm{Id}$. Puisque les endomorphismes T et Id commutent, on peut appliquer la formule du binôme dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathscr{P})$ et on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \Delta^n = (T - \mathrm{Id})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} T^i (-\mathrm{Id})^{n-i}$$

Par une récurrence immédiate, on a, pour tout $Q \in \mathscr{P}$ et tout entier i : $T^i(Q) = Q(X+i)$. La relation précédente appliquée à Q donne alors immédiatement :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \Delta^n(Q) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(X+i).$$

6. (a) Notons tout d'abord qu'on vérifierait facilement que $C(\Delta_r)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathscr{P}_r)$.

i. Soient $g, h \in C(\Delta_r)$ tels que $g(N_r) = h(N_r)$. Puisque g et h commutent avec Δ_r on a

$$g(N_{r-1}) = g \circ \Delta_r(N_r) = \Delta_r \circ g(N_r) = \Delta_r \circ h(N_r) = h \circ \Delta_r(N_r) = h(N_{r-1})$$

et par récurrence descendante on obtient

$$\forall k \in [0, r] \ , \ g(N_k) = h(N_k) \, .$$

Ainsi g et h, endomorphismes de $\mathscr{P}_r$, coïncident sur une base de $\mathscr{P}_r$ donc $g = h$.

ii. immédiat, puisque $(N_n)_{n \in [0,r]}$ est une base de $\mathscr{P}_r$.

iii. - Soit $g \in C(\Delta_r)$ et $a_0, a_1, \ldots, a_r$ tels que $g(N_r) = \displaystyle\sum_{n=0}^{r} a_n N_n$. Puisque, pour $n \in [0, r]$, $N_n = \Delta_r^{r-n}(N_r)$, on a $g(N_r) = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{r} a_n \Delta_r^{r-n} \right) (N_r)$.

  Or l'endomorphisme de $\mathscr{P}_r$ défini par $h = \displaystyle\sum_{n=0}^{r} a_n \Delta_r^{r-n}$ est élément de $C(\Delta_r)$ (vérification facile). Il résulte alors de la question 6.a.i que $g = h$ c'est-à-dire $g = \displaystyle\sum_{n=0}^{r} a_n \Delta_r^{r-n}$.

  g est donc combinaison linéaire des Δ_r^k pour $0 \leq k \leq r$, c'est-à-dire que la famille $(\Delta_r^k)_{k \in [0,r]}$ est génératrice de $C(\Delta_r)$.

- Montrons maintenant que cette famille est libre.

  En effet, si on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k \Delta_r^k = 0$, alors en appliquant cette égalité à N_0, puisque $\Delta(N_0) = 0$, on obtient $a_0 = 0$, puis en l'appliquant à N_1, puisque $\Delta(N_1) = N_0 = 1$ et $\Delta^2(N_1) = 0$ on trouve $a_1 = 0$ etc... Ainsi, tous les a_k sont nuls, ce qui prouve que la famille est libre.

En conclusion : $(\Delta_r^k)_{k \in [0,r]}$ est une base de $C(\Delta_r)$.

iv. Le fait que d et Δ commutent est immédiat.

S'il existait un entier r et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_r$ tels que $d = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k \Delta^k$, on aurait en particulier $N'_{r+1} = d(N_{r+1}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k \Delta^k(N_{r+1}) = \sum_{k=0}^{r} a_k N_{r+1-k}$. Mais tous les polynômes N_{r+1-k} pour

$0 \leq k \leq r$ s'annulent en 0. On aurait donc $N'_{r+1}(0) = 0$ et 0 serait racine au moins double de N_{r+1}, ce qui n'est pas vrai (les racines de N_{r+1} sont simples, ce sont les entiers $0, 1, \ldots, r$).
On a donc obtenu une contradiction. Cet exemple montre en fait que le commutant de Δ n'est pas réduit au sous-espace vectoriel engendré par les Δ^k, contrairement au commutant de Δ_r.

(b) Notons A_r la matrice de $\triangle_r$ dans la base $(N_n)_{n\in[0,r]}$. On vérifie facilement que :

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

On voit que 0 est l'unique valeur propre de $\triangle_r$, donc $\triangle_r$ est un endomorphisme nilpotent et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\triangle_r^{r+1} = 0$. En particulier l'endomorphisme n'est pas diagonalisable, car l'endomorphisme $\triangle_r$ est non nul.

(c) Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(\mathscr{P}_r)$ tel que $g \circ g = \Delta_r$. On aurait alors

$$g \circ \Delta_r = g^3 = \Delta_r \circ g$$

c'est-à-dire que g commute avec Δ_r.

D'après ce qui précède, il existerait des réels $a_0, a_1, \ldots, a_r$ tels que $g = \sum_{k=0}^{r} a_k \Delta_r^k = a_0 \operatorname{Id} + a_1 \Delta_r + \ldots + a_r \Delta_r r$.

On aurait alors $g \circ g = a_0^2 \operatorname{Id} + 2a_0 a_1 \Delta_r + \sum_{k=2}^{r} b_k \Delta_r^k$ où les b_k sont des réels dont la valeur importe peu. Puisque la famille $(\Delta_r^k)_{k\in[0,r]}$ est libre, cela implique $a_0 = 0$ et $2a_0 a_1 = 1$, ce qui est impossible. Il y a donc contradiction et Il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathscr{P}_r$ tel que $g \circ g = \Delta_r$.

Seconde partie

1. Notons d'abord que les définitions de l'énoncé posent problème lorsque $n = 0$. On supposera donc $n \geq 1$ pour la suite.
On remarquera aussi que, puisque l'énoncé suppose $x \notin \mathbb{N}$, les $N_n(x)$, donc les u_n, ne sont pas nuls.

(a) On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^t \frac{|N_{n+1}(x)|}{|N_n(x)|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^t \frac{|x-n|}{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{t-1} \frac{|x-n|}{n}.$$

Pour n assez grand on aura $n - x > 0$ (x est fixé) donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{t-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)$$

puis

$$v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = (t-1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = \frac{t-1-x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit immédiatement :

- si $t \neq 1 + x$, $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{t-1-x}{n}$: la série de terme général v_n diverge.
- si $t = 1 + x$, $v_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et la série de terme général v_n converge.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$ donc, compte tenu des résultats précédents :

- Si $t < 1+x$: la série de terme général v_n diverge et $v_n < 0$ à partir d'un certain rang, donc $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) = -\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $t > 1+x$: la série de terme général v_n diverge et $v_n > 0$ à partir d'un certain rang, donc $\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) = +\infty$ d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $t = 1+x$: la série de terme général v_n converge , donc la suite $(\ln(u_n))$ converge vers un certain réel l_x et (u_n) converge vers un réel $C(x) = e^{l_x} > 0$. On a donc dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} n^{1+x} |N_n(x)| = C(x)$, d'où :
$$|N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^{x+1}}.$$

2. (a) Si $f(x) = b^x$ on a
$$a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \complement_i^n b^i = (b-1)^n$$
d'après la formule du binôme.

(b)
- Si $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k$, Q est de degré $\leq n$ et on a vu dans I.4.d que $Q = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(Q)(0) N_k$. La famille des polynômes (N_k) étant libre, on en déduit
$$\forall k \in [0,n]\ ,\ a_k = \Delta^k Q(0).$$
- Soit R le polynôme de degré n tel que $R(i) = f(i)$ pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ (un tel polynôme existe et est unique d'après les résultats sur les polynômes d'interpolation de Lagrange). D'après I.4.d, on a $R = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(R)(0) N_k$ et d'après I.5,
$$\Delta^k(R)(0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \complement_i^k R(i) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \complement_i^k f(i) = a_k,$$
donc $R = Q$.
Par définition de R on a donc bien
$$f(i) - Q(i) = f(i) - R(i) = 0 \text{ pour tout } i \in [\![0,n]\!].$$

(c)
- Supposons dans un premier temps $x \notin [0,n]$.
Soit $\varphi : t \mapsto f(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(t) - N_{n+1}(t) A$, où A est le réel tel que $\varphi(x) = 0$ (A existe et est unique puisque l'équation $\varphi(x) = 0$ équivaut à $A N_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x)$ et que $N_{n+1}(x)$ est non nul ici).
Puisque $N_{n+1}(i) = 0$ pour tout $i \in [0,n]$ et compte tenu du résultat de la question précédente, la fonction φ s'annule en $0, 1, \ldots, n$ et en x, c'est-à-dire en $n+2$ points distincts. Étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ (car f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par hypothèse et les autres termes sont des fonctions polynomiales), l'application itérée du théorème de Rolle montre qu'il existe un réel θ tel que $\varphi^{(n+1)}(\theta) = 0$.

Mais $\sum_{k=0}^{n} a_k N_k$ est un polynôme de degré $\leq n$, donc sa dérivée $(n+1)$-ième est nulle et puisque le terme de plus haut degré de N_{n+1} est $\dfrac{X^{n+1}}{(n+1)!}$, on a $N_{n+1}^{(n+1)} = 1$. Ainsi, $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - A$, et la relation $\varphi^{(n+1)}(\theta) = 0$ donne $A = f^{(n+1)}(\theta)$.
En remplaçant A par cette valeur dans la relation $\varphi(x) = 0$ on trouve bien $\forall x \notin [\![0, 1]\!]$, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k(x) + f^{(n+1)}(\theta) N_{n+1}(x) \quad (2)$.

- Enfin, cette propriété reste vraie lorsque $x \in [0, n]$ d'après le résultat de la question II.2.b et puisque alors $N_{n+1}(x) = 0$: il suffit de prendre θ quelconque.

(d)
- En reprenant les notations précédentes et compte tenu de l'hypothèse faite ici, on aura

$$\left| f^{(n+1)}(\theta) N_{n+1}(x) \right| \leq Mn \left| N_{n+1}(x) \right|$$

Or, d'après II.1.b, $|N_{n+1}(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{(n+1)^{x+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^{x+1}}$, donc $n\,|N_{n+1}(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^x}$.
Pour $x > 0$ on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f^{(n+1)}(\theta) N_{n+1}(x) = 0$ et la relation (2) implique $\forall x > 0$, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k N_k(x)$ cette relation restant trivialement vraie pour $x = 0$ puisque $a_0 = f(0)$ et $N_k(0) = 0$ si $k \geq 1$.

- Si on suppose de plus $f(i) = 0$ pour tout entier i, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ $a_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \complement_i^k f(i) = 0$ d'où $f(x) = 0$ pour tout $x \geq 0$.

3. (a) En reprenant le résultat de II.1.b, puisque $x \notin \mathbb{N}$: donc si $|h| > 1$, (croissances comparées) d'où si $|h| > 1$, la série $\sum h^n N_n(x)$ est grossièrement divergente.

(b) On suppose ici $|h| < 1$.

i.
- Si $x = k \in \mathbb{N}$ alors $N_n(x) = 0$ dès que $n \geq k+1$, donc la série $\sum_{n\geq 0} h^n N_n(x)$ est convergente (somme finie).
- Sinon, on a toujours l'équivalent donc, toujours à l'aide des croissances comparées des suites usuelles, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 h^n N_n(x) = 0$. Ainsi, , et d'après les théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} h^n N_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente.

ii.
- La fonction $f : h \mapsto (1+h)^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$, on peut donc lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à tout ordre n entre 0 et h :

$$f(h) = \sum_{k=0}^{n} h^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \quad (3)$$

Or, pour $k \geq 1$, $\dfrac{f^{(k)}(h)}{k!} = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}(1+x)^{x-k} = N_k(x)(1+h)^{x-k}$, cette dernière égalité restant vraie pour $k = 0$ puisque $N_0 = 1$, de sorte que la relation (3) devient

$$(1+h)^x = \sum_{k=0}^{n} h^k N_k(x) + (n+1) N_{n+1}(x) \int_0^h (h-t)^n (1+t)^{x-n-1}\mathrm{d}t$$

ce qui se réécrit en :

$$(1+h)^x - \sum_{k=0}^{n} h^k N_k(x) = (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t \quad (4).$$

- On a la majoration

$$\left|\frac{1}{h^n}\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{|h|^n}\left|\int_0^h \left|\frac{h-t}{1+t}\right|^n (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t\right|$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{h-t}{1+t}$ est une fonction homographique, donc monotone ; ses valeurs extrémales sur $[0,h]$ sont donc obtenues pour $t=0$ et $t=h$; ce sont respectivement h^n et 0, de sorte que

$$\forall t \in [0,h] \text{ (ou } [h,0]) , \ \left|\frac{h-t}{1+t}\right|^n \le |h^n|$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N} , \ \left|\frac{1}{h^n}\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_0^h (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t\right|$$

(inutile de calculer la valeur de cette dernière intégrale, ce qui est important, c'est qu'elle ne dépend pas de n).

iii. Si x est entier, $N_{n+1}(x) = 0$ dès que $n \ge x$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t = 0.$$

Sinon, l'équivalent $|N_{n+1}(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{(n+1)^{x+1}}$ obtenu en II.1.b donne

$$|(n+1)N_{n+1}(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C(x)}{(n+1)^{x}}$$

D'après la question précédente, il existe une constante K telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} , \ \left|\int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t\right| \le K\,|h|^n$$

et, puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{h^n}{n^{x+1}} = 0$, on a encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^h \left(\frac{h-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{x-1}\mathrm{d}t = 0$.

En utilisant alors la relation (4), on obtient $\forall h \in]-1,1[\, , \ \forall x \in \mathbb{R} \, , \ (1+h)^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} h^k N_k(x)$.

(c) On suppose ici $h = 1$.

i. Pour $x \le -1$, x n'est pas un entier naturel et l'on a toujours $|N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^{x+1}}$. $x+1$ étant ≤ 0, la suite $(N_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend donc pas vers 0 (car $C(x) > 0$) c'est-à-dire que si $x \le 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\ge 0} N_n(x)$ est grossièrement divergente.

ii. En remplaçant h par 1 dans la relation de la question II.3.b.ii, on obtient

$$2^x - \sum_{k=0}^{n} N_k(x) = (n+1)N_{n+1}(x) \int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\mathrm{d}u \quad (5)$$

Or, pour $u \in [0,1]$, $0 \leq \dfrac{1-u}{1+u} \leq 1-u$ et $(1+u)^{x-1} \leq \max(1, 2^{x-1}) = M$ donc

$$\left|(n+1)N_{n+1}(x)\int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\mathrm{d}u\right| \leq M(n+1)\left|N_{n+1}(x)\right| \int_0^1 (1-u)^n \mathrm{d}u = M\left|N_{n+1}(x)\right| \quad (6).$$

Si x est un entier naturel, $N_{n+1}(x)$ est nul pour n assez grand, et sinon, l'équivalent

$$|N_{n+1}(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C(x)}{(n+1)^{x+1}}$$

obtenu en II.1.b montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_{n+1}(x) = 0$ puisqu'ici $x+1>0$.

On aura donc encore, d'après (6), $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)N_{n+1}(x)\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1-u}{1+u}\right)^n (1+u)^{x-1}\mathrm{d}u = 0$ ce qui prouve d'après (5) que $\forall x > -1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} N_k(x) = 2^x$.

(d) On examine donc ici le dernier cas, à savoir $h = -1$.

i. • Si x est un entier naturel, $(-1)^n N_n(x)$ est nul dès que $n \geq x+1$; dans ce cas, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n N_n(x)$ converge (somme finie).

Sinon, $|(-1)^n N_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C(x)}{n^{x+1}}$ où $C(x) > 0$, donc les théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs et les résultats sur les séries de Riemann montrent que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|(-1)^n N_n(x)|$ converge ssi $x > 0$.

En rassemblant les deux cas, on en déduit la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente si, et seulement si, $x \geq 0$.

• Si $x \geq 0$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n N_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.

Si $x < 0$ et $n \geq 1$, $N_n(x) = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$ est du signe de $(-1)^n$ donc $(-1)^n N_n(x)$ est positif et la convergence de la série équivaut alors à son absolue convergence, qui n'a pas lieu dans ce cas. En conclusion la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n N_n(x)$ est convergente si, et seulement si, $x \geq 0$.

ii. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ la propriété :

« $\forall x \in \mathbb{R}$, $N_0(x) - N_1(x) + \ldots + (-1)^n N_n(x) = (-1)^n N_n(x-1)$ »

• Cette propriété est facilement vérifiée pour $n = 1$ puisque

$$N_0(x) - N_1(x) = 1 - x = -(x-1) = -N_1(x-1).$$

• Si on la suppose vérifiée au rang n, alors

$$\begin{aligned} N_0(x) - N_1(x) + \ldots + (-1)^n N_n(x) + (-1)^{n+1}N_{n+1}(x) &= (-1)^n N_n(x-1) + (-1)^{n+1}N_{n+1}(x) \\ &= (-1)^n\left[\Delta(N_{n+1})(x-1) - N_{n+1}(x)\right] \\ &= (-1)^n\big[N_{n+1}(x-1+1) \\ &\quad - N_{n+1}(x-1) - N_{n+1}(x)\big] \\ &= (-1)^{n+1}N_{n+1}(x-1) \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat à l'ordre $n+1$ et achève la récurrence.

iii. La relation précédente s'écrit : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k N_k(x) = (-1)^n N_n(x-1)$.

Si $x-1$ est un entier naturel, c'est-à-dire si $x \in \mathbb{N}$, $N_k(x)$ est nul pour $k \geq x+1$ et $N_n(x-1)$ est nul pour $n \geq x$, donc $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k N_k(x) = 0$.

Si $x = 0$, $N_k(x) = 0$ pour $k \geq 1$ donc $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k N_k(x) = N_0 = 1$.

Sinon, l'équivalent $|N_n(x-1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C(x)}{n^x}$ montre que $\lim_{n\to+\infty} N_n(x-1) = 0$ puisque $x > 0$, donc $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k N_k(x) = 0$.

La conclusion de toute la question II.3 est donc la suivante :

La relation $(1+h)^x = \sum_{k=0}^{+\infty} h^k N_k(x)$ est vraie si, et seulement si,

- $|h| < 1$ et x réel quelconque.
- $h = 1$ et $x > -1$.
- $h = -1$ et $x \geq 0$.

●●●●●●●●●●●