Devoir libre $n°8$
Correction

Exercice nº 1

1. (a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et au voisinage de $+\infty$ la fonction est équivalente à $\dfrac{1}{t^{\alpha n}}$ qui est intégrable ($\alpha n > 1$) au voisinage de $+\infty$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$ converge.

(b) Le changement de variable $t = \left(\dfrac{u}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ conduit à l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n} = \frac{1}{\alpha n^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}u}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}.$$

Ceci montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}u}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}u}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n} = \alpha n^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}.$$

(c) Appliquons la formule :

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathtt{C}_n^k \left(\frac{u}{n}\right)^k = 1 + u + \sum_{k=2}^{n} \mathtt{C}_n^k \left(\frac{u}{n}\right)^k.$$

Donc $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \geq 1+u$, car $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathtt{C}_n^k \left(\frac{u}{n}\right)^k \geq 0$.

2. La fonction exponentielle est considérée ici comme la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{u}{n}\right)} = e^{u \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{u}{n}\right)}{\frac{u}{n}}} = e^{u \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^u$.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \geq 0$, posons $f_n(u) = \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}$ sur $]0,+\infty[$, de plus

$$|f_n(u)| \leq \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u}$$

et $u \mapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (d'après 1.b)). Donc, d'après le théorème de convergence dominé, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} v_n = \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-u}\mathrm{d}u = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

(b) D'après la question précédente et en tenant compte de l'égalité de question 1.b), on peut déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$.

4. (a) On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$, donc le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} I_n x^n$ est égal à 1.

(b) Pour $x \in]-1,1[$ fixé, considérons la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ définie sur $[0,+\infty[$ où $u_n(t) = \left(\dfrac{x}{1+t^\alpha}\right)^n$. Il s'agit d'une série géométrique de raison $\dfrac{x}{1+t^\alpha}$ tel que $\left|\dfrac{x}{1+t^\alpha}\right| < 1$. Notons (S_n) la suite se somme partielle associée :

$$S_n(t) = \frac{x}{1+t^\alpha} \frac{1-\left(\frac{x}{1+t^\alpha}\right)^n}{1-\frac{x}{1+t^\alpha}} = \frac{x\left(1-\left(\frac{x}{1+t^\alpha}\right)^n\right)}{1+t^\alpha-x}$$

On a :

• La suite $(S_n)_n$ converge simplement vers $t \mapsto \dfrac{x}{1+t^\alpha - x}$ sur $[0,+\infty[$.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \geq 0$, $|S_n(t)| \leq \dfrac{1}{1+t^\alpha - x}$.

• La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha - x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$: En effet, cette fonction est continue sur $[0,+\infty[$ et équivalente à $\dfrac{1}{t^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha > 1$.

Donc, d'après le théorème de convergence dominé, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} S_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} S_n(t)\mathrm{d}t$$

égalité qui s'écrit encore sous la forme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x}\mathrm{d}t.$$

Exercice n° 2

1. • Si $x \neq 0$, $I(0,x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ixt}\mathrm{d}t = \frac{1}{ix}\left[e^{ixt}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{e^{2\pi x}-1}{ix}$. Si $x = 0$, $I(0,0) = 2\pi$.

• $I(1,x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(t)e^{ixt}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}e^{ixt}\mathrm{d}t = \frac{1}{2i}\left(\int_0^{2\pi} e^{i(x+1)t}\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} e^{i(x-1)t}\mathrm{d}t\right)$.

- Si $x \neq 1$ et -1,

$$\begin{aligned} I(1,x) &= \frac{-1}{2(1+x)}\left(e^{i(1+x)2\pi}-1\right) + \frac{1}{2(x-1)}\left(e^{i(x-1)2\pi}-1\right) \\ &= \frac{-1}{2(1+x)}\left(e^{i2\pi x}-1\right) + \frac{1}{2(x-1)}\left(e^{i2\pi x}-1\right). \end{aligned}$$

- Si $x = 1$, $I(1,1) = i\pi$ et si $x = -1$, $I(1,-1) = -i\pi$.

2. Pour x réel et n entier naturel on a :

$$\begin{aligned} I(n+2,x) &= \int_0^{2\pi} \sin^{n+2} t e^{ixt}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^n t(1-\cos^2 t)e^{ixt}\mathrm{d}t \\ &= I(n,x) - \int_0^{2\pi} (\sin^n t\cos t)\cos t e^{ixt}\mathrm{d}t \\ &= I(n,t) - \frac{1}{n+1}\int_0^{2\pi} (\sin^{n+1} t)'\cos t e^{ixt}\mathrm{d}t \\ &= I(n,x) - \frac{1}{n+1}\left[\sin^{n+1} t\cos t e^{ixt}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n+1}\int_0^{2\pi} \sin^{n+1} t(-\sin t e^{ixt} + ix\cos t e^{ixt})\mathrm{d}t \\ &= I(n,x) - \frac{1}{n+1}\int_0^{2\pi} \sin^{n+2} t e^{ixt}\mathrm{d}t + \frac{ix}{n+1}\int_0^{2\pi} \sin^{n+1}\cos t e^{ixt}\mathrm{d}t \\ &= I(n,x) - \frac{1}{n+1}I(n+2,x) + \frac{ix}{(n+1)(n+2)}\int_0^{2\pi} (\sin^{n+2} t)' e^{ixt}\mathrm{d}t \\ &= I(n,x) - \frac{1}{n+1}I(n+2,x) + \frac{ix}{(n+1)(n+2)}(0 - ixI(n+2,x)) \\ &= I(n,x) - \frac{1}{n+1}I(n+2,x) + \frac{v^2}{(n+1)(n+2)}I(n+2,x) \end{aligned}$$

D'où :

$$I(n,x) = \left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{v^2}{(n+1)(n+2)}\right)I(n+2,x)$$

ou encore

$$\left[(n+2)^2 - x^2\right]I(n+2,x) = (n+1)(n+2)I(n,x).$$

3. Les formules d'Euler $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ et la formule de Newton $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ permettent d'écrire :

$$I(n,x) = \left(\frac{1}{2i}\right)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \complement_n^k \int_0^{2\pi} e^{i(2k-n+x)t} \mathrm{d}t$$

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(2k-n+x)t}\mathrm{d}t$ sont nulles sauf si $2k - n + x = 0$ ou encore $n - x = 2k$. Donc plusieurs cas à distingués :

(a) Si $n = 2p$ et $x = 2l + 1$, alors $n - x$ est impair, donc $I(2p, 2l+1) = 0$.

(b) De même si $n = 2p + 1$ et $x = 2l$, $I(2p+1, 2l) = 0$.

(c) Si $n = 2p$ et $x = 2l$, on a :

$$I(2p, 2l) = \left(\frac{1}{2i}\right)^{2p} \sum_{k=0}^{2p} (-1)^{2p-k} \complement_{2p}^k \int_0^{2\pi} e^{i(2k-2p+2l)t} \mathrm{d}t$$

i. Si $l > p$, alors $p - l < 0$ et donc $p - l \neq k$ pour tout $k \in [\![0, 2p]\!]$. Ainsi $I(2p, 2l) = 0$.

ii. Si $l \leq p$, alors $0 \leq p - l \leq 2p$ et donc

$$I(2p, 2l) = \left(\frac{1}{2i}\right)^{2p} (-1)^{p+l} \complement_{2p}^{p-l} 2\pi = \frac{(-1)^p}{4^p} 2\pi \complement_{2p}^{p-l}.$$

(d) Si $n = 2p + 1$ et $x = 2l + 1$, on a :

$$I(2p+1, 2l+1) = \left(\frac{1}{2i}\right)^{2p+1} \sum_{k=0}^{2p+1} (-1)^{2p+1-k} \complement_{2p+1}^k \int_0^{2\pi} e^{i(2k-2p+2l)t} \mathrm{d}t$$

i. Si $l > p$, alors $p - l < 0$ et donc $p - l \neq k$ pour tout $k \in [\![0, 2p+1]\!]$. Ainsi $I(2p+1, 2l+1) = 0$.

ii. Si $l \leq p$, alors $p - l \leq 2p$ et donc

$$I(2p+1, 2l+1) = \left(\frac{1}{2i}\right)^{2p+1} (-1)^{p+l+1} \complement_{2p+1}^{p-l} 2\pi = \frac{i(-1)^l}{4^p} \pi \complement_{2p+1}^{p-l}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$e^{iz\sin(t)+xt} = e^{ixt} e^{iz\sin(t)} = e^{ixt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz\sin(t))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{ixt}(i\sin t)^n}{n!} z^n.$$

Posons $u_n(t) = \dfrac{e^{ixt}(i\sin t)^n}{n!} z^n$. On a $|u_n(t)| \leq \dfrac{x^n}{n!}$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. Donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}*} u_n$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$, donc on peut intégrer terme à terme :

$$f_x(z) = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\sin^n t e^{ixt} \mathrm{d}t\right) \frac{i^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n I(n,x)}{n!} z^n.$$

Cette égalité est valable pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc le rayon de convergence de la série est infini.

5. La fonction $D_x f_x$ est une fonction définie par une série entière en z de rayon de convergence infinie, donc les séries dérivées $\dfrac{df_x}{dz}$ et $\dfrac{d^2 f_x}{dz^2}$ existent et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\frac{df_x}{dz}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ixt} n (i\sin t)^n}{n!} z^{n-1}$$

et

$$\frac{d^2 f_x}{dz^2}(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{ixt} n(n-1)(i\sin t)^n}{n!} z^{n-2}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
D_x f_x(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^{n-2} + \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^{n-1} + \left(1-\frac{x^2}{z^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^2\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^{n-2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)+n-x^2\right]\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^2\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^{n-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{\infty}\left[n(n-1)-x^2\right]\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^n - I(0,x)\frac{x^2}{z^2} - iI(1,x)\frac{x^2}{z} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)-x^2\right]\frac{i^n I(n+2,x)}{(n+2)!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n I(n,x)}{n!} z^n + I(1,x)\frac{i}{z} - I(0,x)\frac{x^2}{z^2} - iI(1,x)\frac{x^2}{z} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)I(n,x) - \left[(n+2)(n+1)-x^2\right]I(n+2,x)\right]\frac{i^n}{(n+2)!} z^n \\
&\quad + I(1,x)\frac{i}{z} - I(0,x)\frac{x^2}{z^2} - iI(1,x)\frac{x^2}{z}
\end{aligned}$$

Comme $\left[(n+1)(n+2)I(n,x) - \left[(n+2)(n+1)-x^2\right]I(n+2,x)\right] = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ D_x f_x(z) = \frac{d^2 f_x}{dz^2}(z) + \frac{1}{x}\frac{df_x}{dz}(z) + \left(1-\frac{x^2}{z^2}\right) f_x(z) = I(1,x)\frac{i}{z} - I(0,x)\frac{x^2}{z^2} - iI(1,x)\frac{x^2}{z}$$

Si z est un entier, alors $I(1,x) = I(0,x) = 0$, donc $D_x f_x(z) = 0$.