Devoir libre $n^\circ 10$
Correction

Partie I : Questions préliminaires

1. (a) Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ des scalaires réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0$, donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j) = \lambda_j$, donc la famille $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ est libre.

(b) Par linéarité, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $e_k^*(x) = e_k^*\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{s} x_j e_k^*(e_j) = x_k$.

(c) Soit l une forme linéaire et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un élément de E. On a :

$$l(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i l(e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) l(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(x)$$

en posant $\alpha_i = l(e_i)$. Nous voyons donc que les n formes linéaires $e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*$ engendrent E^* et comme elles sont libres, ces formes linéaires décrivent une base de E^*.

(d) D'après ce qui précède, $E^* = \text{Vect}(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$, d'où $\dim E^* = n = \dim E$.

2. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ en une base $\mathscr{B}^* = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ de E^*. Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base préduale de $\mathscr{B}^*$. On a alors

$$\forall x \in E, \;\; x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i.$$

On voit donc

$$x \in \bigcap_{i=1}^{r} \ker(\varphi_i) \Leftrightarrow x = \sum_{i=r+1}^{n} \varphi_i(x) e_i \Leftrightarrow x \in \text{Vect}(e_{r+1}, ..., e_n)$$

et donc $\dim \bigcap_{i=1}^{r} \ker(\varphi_i) = n - r$.
Dans le cas où $r = n$, l'équivalence ci-dessus devient

$$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \Leftrightarrow x = 0.$$

3. (a) Rappelons la formule générale pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$:

$${}^tXAX = (AX|X) = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Ici, et utilisant l'indication, on a

$${}^tXH_nX = \sum_{1 \le i,j \le n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} \text{d}t.$$

Utilisant la linéarité de l'intégrale et reconnaissant un carré, on obtient :

$${}^tXH_nX = \int_0^1 \sum_{1 \le i,j \le n} x_i x_j t^{i+j-2} \text{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^i\right)^2 \text{d}t.$$

(b) De la formule précédente, on déduit immédiatement que H_n est positive. Démontrons qu'elle est définie positive. En effet, si $(H_nX|X) = 0$, alors, puisqu'on intègre une fonction continue et positive sur $[0, 1]$ dont l'intégrale doit être nulle, on déduit que

$$\forall t \in [0, 1], \; \sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1} = 0.$$

Un polynôme ayant une infinité de racine étant le polynôme nul, on en déduit que tous les x_i sont nuls, soit encore que X est nul. Ainsi, H_n est bien définie positive. En particulier H_n est inversible.

Partie II : Étude d'un endomorphisme symétrique

1. Il est clair que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est symétrique, bilinéaire et positive, montrons qu'elle est définie.

Soit $P \in \mathscr{P}_d$ tel que $(P|P) = 0$. Donc $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)\mathrm{d}t = 0$, comme l'application $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue sur $[0,1]$ alors $\forall t \in [0,1]$, $P(t)^2 = 0$, donc le polynôme P admet une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. $\forall P_1, P_2 \in \mathscr{P}_d$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$I_k(P_1 + \lambda P_2) = \int_0^1 t^k(P_1(t) + \lambda P_2(t))\mathrm{d}t = \int_0^1 t^k P_1(t)\mathrm{d}t + \lambda \int_0^1 t^k P_2(t)\mathrm{d}t = I_k(P_1) + \lambda I_k(P_2).$$

Donc I_k est une application linéaire de $\mathscr{P}_d$ dans $\mathbb{R}$, donc c'est une forme linéaire sur $\mathscr{P}_d$.

3. Puisque la famille $(I_k)_{0\leq k \leq d}$ est de cardinal $d+1$ et $\dim \mathscr{P}_d^* = d+1$, il suffit de montrer que la famille est libre. Soit donc $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_d$ des réels tels $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} \alpha_k I_k = 0$. En particulier, pour tout $l \in [\![0,d]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} \alpha_k I_k(X^l) = 0$. Or $I_k(X^l) = \displaystyle\int_0^1 t^{k+l}\mathrm{d}t = \frac{1}{k+l+1}$, on a donc :

$$\forall l \in [\![0,d]\!], \ \sum_{k=0}^{d} \frac{\alpha_k}{k+l+1} = 0.$$

Donc le vecteur $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_d)$ est solution du système $H_{d+1}X = 0$, et comme H_{d+1} est inversible, alors $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_d = 0$, donc la famille $(I_k)_{0\leq k\leq d}$ est libre.

4. Notons $\mathscr{C} = (1, X, X^2, ..., X^d)$ la base canonique de $\mathscr{P}_d$ et $\mathscr{B}_0 = (l_0, l_1, ..., l_d)$ la base duale de $\mathscr{C}$. On a donc, pour tout $(i,j) \in [\![0,d]\!]^2$, $l_i(X^j) = \delta_{i,j}$. Notons $P = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq d}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_0$ à la base $\mathscr{B}$. On a aussi :

$$\forall k \in [\![0,d]\!]^2, \ \ I_k = \sum_{i=0}^{d} p_{ki} l_i.$$

Donc, pour tout $j \in [\![0,d]\!]^2$,

$$I_k(X^j) = \sum_{i=0}^{d} p_{ki} l_i(X^j) = p_{kj}.$$

D'où $p_{kj} = \dfrac{1}{k+j+1}$, et donc $P = H_{d+1}$.

5. Il est clair que l'application h est linéaire de $\mathscr{P}_d$ dans $\mathscr{P}_d$. Soit maintenant $P \in \mathscr{P}_d$ tel que $h(P) = 0$, donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=0}^{d} I_k(P)t^k = 0,$$

donc tous les coefficients du polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} I_k(P)X^k$ son nuls, c'est-à-dire $P \in \displaystyle\bigcap_{k=0}^{d} \ker(I_k) = \{0\}$, donc h est un injective et puisqu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathscr{P}_d$, qui est de dimension finie, alors h est un isomorphisme de $\mathscr{P}_d$.

On a, $\forall k \in [\![0,d]\!]$, $h(X^l)(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} I_k(X^l)t^k = \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{k+l+1}t^k$, donc h est représenté par H_{d+1} dans la base canonique.

6. Pour tout $P, Q \in \mathscr{P}_d$, on a :

$$\begin{aligned}
(P|h(Q)) &= \int_0^1 P(t) \sum_{k=0}^{d} I_k(Q)t^k \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{d} I_k(Q) \left(\int_0^1 P(t)t^k \mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_{k=0}^{d} I_k(Q) I_k(P) \\
&= (h(P)|Q)
\end{aligned}$$

Donc h est un endomorphisme symétrique de $\mathscr{P}_d$, donc il est diagonalisable, il est de meme de la matrice A. Soit λ une valeur propre de A, donc de h, alors il existe $P \in \mathscr{P}_d$ non nul tel que $h(P) = \lambda P$, d'où :

$$\lambda(P|P) = (P|h(P) = \sum_{k=0}^{d} I_k(P)^2 \geq 0.$$

Donc $\lambda \geq 0$ ($(P|P) = \|P\|^2 \neq 0$) et comme h est inversible, alors $\lambda > 0$.

• • • • • • • • • •