

Devoir libre n°11

Correction

Partie I : Méthode utilisant un produit scalaire

Notons que $\Delta = \inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt$ existe car l'ensemble $\left\{ \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est une partie non vide et minorée (par zéro!) de $\mathbb{R}$.

1. (a) On sait que la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ a pour domaine de définition $]0, +\infty[$, et qu'elle vérifie :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!.$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$ converge et vaut $k!$.

On pose $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$.

- (b) Montrons que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E .

• Soit A un élément de $\mathbb{R}[X]$. Il existe un élément d de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \dots, a_d)$ de $\mathbb{R}^{d+1}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, A(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k.$$

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge donc $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^d a_k x^k e^{-x} \right) dx = \sum_{k=0}^d a_k \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge

comme combinaison linéaire de $d+1$ intégrales convergentes. Ainsi l'intégrale $\int_0^{+\infty} A(x) e^{-x} dx$ est convergente.

Soit (P, Q) un couple d'éléments de E . Comme PQ appartient à $\mathbb{R}[X]$ donc $\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$ converge. Ainsi $(P|Q)$ existe et est réel. Donc $(\cdot|\cdot)$ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit λ un réel et soient P, Q, R trois éléments de E .

$$\begin{aligned} (\lambda P + Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(x) R(x) e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(x) R(x) + Q(x) R(x)) e^{-x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(x) R(x) e^{-x} + Q(x) R(x) e^{-x}) dx \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} P(x) R(x) e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} Q(x) R(x) e^{-x} dx \end{aligned}$$

car toutes les intégrales convergent. Alors

$$(\lambda P + Q|R) = \lambda(P|R) + (Q|R).$$

Donc $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche.

• Soit (P, Q) un couple d'éléments de E . On a :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(x) Q(x) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} Q(x) P(x) e^{-x} dx = (Q|P).$$

Ainsi $(\cdot|\cdot)$ est symétrique.

• Soit P un élément de E . $\forall x \in \mathbb{R}, (P(x))^2 e^{-x} \geq 0$ donc $(P|P) = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 e^{-x} dx \geq 0$. Donc $(\cdot|\cdot)$ est positive.

- Soit P un élément de E tel que $(P|P) = 0$.

On a donc $\int_0^{+\infty} (P(x))2e^{-x}dx = 0$ et l'application $x \mapsto (P(x))2e^{-x}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Alors $x \mapsto (P(x))2e^{-x}$ est nulle sur $[0, +\infty[$. Comme $x \mapsto e^{-x}$ ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$:

$$\forall x \in [0, +\infty[, (P(x))^2 = 0.$$

Ainsi $\forall x \in [0, +\infty[, P(x) = 0$. Le polynôme P admet alors une infinité de zéros c'est donc le polynôme nul. Donc $(\cdot|\cdot)$ est définie.

Les cinq points précédents permettent de dire que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E .

2. Pour tout $P \in E$, $\|P\|^2 = (P|P) = \int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t} dt$. Alors si Q est un polynôme de F défini par $Q = xX + y$, où x et y sont deux réels :

$$\|X^3 - Q\|^2 = \|X^3 - xX - y\|^2 = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt.$$

3. (a) $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace vectoriel euclidien, F est un sous espace vectoriel de E et X^3 est un élément de E . Le théorème de meilleur approximation indique que :
 1. $\{\|X^3 - Q\|, Q \in F\}$ possède un minimum donc $\{\|X^3 - Q\|^2, Q \in F\}$ possède également un minimum.
 2. Il existe un élément Q_0 de F et un seul qui réalise ces deux minimums.
 3. Q_0 est la projection orthogonale de X^3 sur F .
 4. $[d(X^3, F)]^2 = \min_{Q \in F} \|X^3 - Q\|^2 = \|X^3 - Q_0\|^2$.
- (b) Q_0 est la projection orthogonale de X^3 sur F et $F = \text{Vect}(1, X)$. Ainsi $X^3 - Q_0$ appartient à l'orthogonal de F . Alors $X^3 - Q_0$ est orthogonal à 1 et à X . D'où :

$$(X^3 - Q_0|1) = 0$$

et

$$(X^3 - Q_0|X) = 0.$$

- (c) Q_0 appartient à F donc il existe deux réels x_0 et y_0 tels que $Q_0 = x_0X + y_0$. De plus $(X^3 - Q_0|1) = (X^3 - Q_0|X) = 0$. Alors $0 = (X^3 - Q_0|1) = (X^3 - x_0X - y_0|1) = \int_0^{+\infty} (t^3 - x_0t - y_0)e^{-t} dt$. Donc

$$0 = I_3 - x_0I_1 - y_0I_0 = 3! - 1!x_0 - 0!y_0 = 6 - x_0 - y_0.$$

Ainsi :

$$x_0 + y_0 = 6 \quad (1)$$

On a aussi

$$0 = (X^3 - Q_0|X) = (X^3 - x_0X - y_0|X) = I_4 - x_0I_2 - y_0I_1 = 24 - 2x_0 - y_0.$$

Alors

$$2x_0 + y_0 = 24 \quad (2)$$

Donc $Q_0 = x_0X + y_0$, le polynôme qui réalise le minimum de $\{\|X^3 - Q\|^2 / Q \in F\}$, est défini par le système :

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = 6 \\ 2x_0 + y_0 = 24 \end{cases}$$

- (d) On trouve d'abord $(x_0, y_0) = (18, -12)$. On a alors

$$\Delta = \int_0^{+\infty} (t^3 - 18t + 12)^2 e^{-t} dt.$$

En développant, on trouve :

$$\Delta = \int_0^{+\infty} (t^6 - 36t^4 + 24t^3 + 324t^2 - 432t + 144)e^{-t} dt = I_6 - 36I_4 + 24I_3 + 324I_2 - 432I_1 + 144I_0 = 360.$$

Partie II : méthode utilisant une fonction de deux variables

$$4. \text{ Soit } (x, y) \text{ un élément de } \mathbb{R}^2. f(x, y) = \int_0^{+\infty} (t^3 - xt - y)^2 e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (t^6 + x^2 t^2 + y^2 - 2xt^4 - 2yt^3 + 2xyt) e^{-t} dt.$$

$$f(x, y) = I_6 + x^2 I_2 + y^2 I_0 - 2x I_4 - 2y I_3 + 2xy I_1$$

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 48x - 12y + 720.$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy - 48x - 12y + 720.$$

5. Notons que f est une fonction polynôme sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 2y - 48 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y - 12 \end{cases}$$

Donc f admet un point critique et un seul (x_0, y_0) sur $\mathbb{R}^2$: $(x_0, y_0) = (18, -12)$.

6. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, donc si f possède un extremum local en un point de $\mathbb{R}^2$, ce point est un point critique de f . Ainsi (x_0, y_0) est le seul point de $\mathbb{R}^2$ où f peut admettre un extremum local. Étudions alors si f admet un extremum local en (x_0, y_0) en utilisant le théorème de cours. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynôme. On a, avec les notations de Monge :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(18, -12) = 4, s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(18, -12) = 2 \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(18, -12) = 2.$$

Donc $r = 4 > 0$ et $rt - s^2 = 4 > 0$. Ceci prouve que la fonction f a un minimum local au point $(18, -12)$ et qui vaut $m = f(18, -12) = 360$.

7. Montrons que ce minimum est global. Pour cela établissons que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq 360.$$

Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$f(x, y) - 360 = 2x^2 + y^2 + 2xy - 48x - 12y + 360$$

On peut écrire successivement :

$$\begin{aligned} f(x, y) - 360 &= 2(x^2 + xy - 24x) + y^2 - 12y + 360 \\ &= 2 \left(\left(x + \frac{y}{2} - 12 \right)^2 - \frac{y^2}{4} + 12y + 72 \right) + y^2 - 12y + 360 \\ &= 2 \left(x + \frac{y}{2} - 12 \right)^2 + \frac{1}{2}(y^2 + 24y + 144) \\ &= 2 \left(x + \frac{y}{2} - 12 \right)^2 + \frac{1}{2}(y + 12)^2 \end{aligned}$$

On constate que $f(x, y) - 360 \geq 0$ en tant que somme de deux carrés de réels, ce qui prouve que f admet un minimum global en (x_0, y_0) .

Remarquons que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si, $(x, y) = (18, -12) = (x_0, y_0)$, donc il s'agit d'un minimum global strict.

• • • • •