Devoir libre n°1
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

Exercice 1

1. Soit $a \in G$ fixé. Considérons l'application f définie par :

$$f: \begin{array}{ll} H & \longrightarrow aH \\ h & \longmapsto ah \end{array}$$

Il s'agit clairement d'une application surjective (par construction) de H sur aH. De plus, si $ah_1 = ah_2$, alors $h_1 = h_2$ car a est inversible, et donc f est aussi injective. f est donc une bijection de H sur aH, ces deux ensembles ont donc le même nombre d'éléments :

$$\operatorname{card}(aH) = \operatorname{card}(H).$$

2. Supposons que $aH \cap bH = \varnothing$ et prouvons que $aH = bH$. Par symétrie, il suffit de prouver que $aH \subset bH$. Soit $x \in aH \cap bH$, $x = ah_1 = bh_2$. Prenons $y = ah \in aH$. Alors $a = bh_2h_1^{-1}$ et donc $y = bh_2h_1^{-1}h \in bH$.

3. La réunion des ensembles aH est clairement égale à G (si $x \in G$, il est dans xH). On ne garde que les aH deux à deux disjoints et par les deux questions précédentes, on réalise ainsi une partition de G avec des ensembles qui ont tous le même cardinal, à savoir le cardinal de H. Si k est le nombre d'ensembles nécessaires pour réaliser cette partition, on a

$$k \operatorname{card}(H) = \operatorname{card}(G),$$

et donc le cardinal de H divise celui de G.

Exercice 2

1. A est une partie non vide de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ car elle contient l'application nulle. Il est clair que A est stable par l'addition et la soustraction. Soit maintenant $f = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$ et $g = b_0 + \sum_{k=1}^{m} b_k \cos(kx)$ deux éléments de A, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x)g(x) = a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} a_k a_l \cos(kx)\cos(lx) = a_0b_0 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2} a_k a_l \left(\cos[(k-l)x] + \cos[(k+l)x]\right).$$

On voit bien que fg est un élément de A. En conclusion A est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. Soit $x \mapsto f(x) = \sum_{l=0}^{n} a_k \cos(lx)$ un élément de A, on a :

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)dt = \sum_{l=0}^{n} a_l \int_0^{2\pi} \cos(lt)\cos(kt)dt = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n} a_l \int_0^{2\pi} [\cos(l-k)t) + \cos(l+k)t]\, dt = \pi a_k.$$

3. Soit $f = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx)$ et $g = b_0 + \sum_{k=1}^{m} b_k \cos(kx)$ deux éléments de A tels que $fg = 0$ avec $f \neq 0$. D'après la question précédente les coefficients de fg, c'est-à-dire les $a_k b_l$, sont nuls. Comme f est non nulle alors il existe un indice k tel que $a_k \neq 0$ alors $b_l = 0$ et ceci pour tout l, donc $g = 0$. D'où A est un anneau intègre.

4. • On a, pour tout couple (P, Q) de polynômes, $\varphi(P+Q) = (P+Q)(\cos(x)) = P(\cos(x))+Q(\cos(x)) = \varphi(P)+\varphi(Q)$ et $\varphi(PQ) = PQ(\cos(x)) = P(\cos(x))Q(\cos(x)) = \varphi(P)\varphi(Q)$, de plus $\varphi(1) = \varphi(P^0) = P^0(\cos(x)) = 1$. Donc φ est morphisme d'anneaux.
Soit P tel que $\varphi(P) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(\cos(x)) = 0$, donc P admet une infinité de racines et donc il est nul. Ainsi φ est injective.
On admet le résultat suivant : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul polynôme noté T_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos(nx).$$

(T_n s'appelle le polynôme de Tchebychev de première espèce)
Donc si $f = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(\cos(x)$, alors $f = \varphi(P)$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k$.
En conclusion φ est un isomorphisme d'anneaux.
• Soit I un idéal de A, donc $\varphi^{-1}(I)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, donc il est de la forme (P) avec P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, donc

$$I = \varphi(\varphi^{-1}(I)) = \varphi((P)) = \{x \mapsto PQ(\cos x)/Q \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Réciproquement, les parties de la forme $\{x \mapsto PQ(\cos x)/Q \in \mathbb{K}[X]\}$, $P \in \mathbb{K}[X]$, sont des idéaux de A.

Exercice 3

1. Soit $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ et $N \in GL_n(\mathbb{Z})$ tels que $MN = I_n$, donc $\det M \det N = 1$ et comme $\det M, \det N \in \mathbb{Z}$, alors $\det M$ est inversible dans $\mathbb{Z}$, donc $\det M = \pm 1$.
Supposons $\det(A) = \pm 1$. L'inverse d'une matrice peut être exprimé par la comatrice. Le determinant de A étant non nul, la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\mathrm{com}(A) = \pm {}^t\mathrm{Com}(A).$$

Or les coefficients de la matrice $\mathrm{Com}(A)$ sont les cofacteurs de A et ceux-ci sont des entiers, et donc l'inverse de A est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

2. On a $I_n \in GL_n(\mathbb{Z})$, donc $GL_n(\mathbb{Z}) \neq \varnothing$, de plus il est clair que $GL_n(\mathbb{Z})$ est stable par la multiplication des matrices. Enfin si $M \in GL_n(\mathbb{Z})$, alors $\det M = \pm 1$ et donc $A^{-1} = \pm {}^t\mathrm{Com}(A) \in GL_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 4

1. ◇ Preuve de l'existence : par récurrence sur l'entier $n \geq 0$.
• Pour $n = 0$, on pose $Q_0 = \dfrac{A(0)}{B(0)}$ qui existe puisque $B(0) \neq 0$. On constate alors que $A - BQ_0$ est par construction un polynôme dont 0 est une racine, donc $A - BQ_0$ est d la forme XS_0.
• Soit n fixé et supposons le théorème vrai pour tous polynômes et tout $i \leq n$; montrons le pour les polynômes A et B de l'énoncé et pour l'entier $n+1$.
Commençons par effectuer la division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre n, et écrivons donc

$$A = BQ_n + X^{n+1}S_n$$

avec $\deg Q_n \leq n$, puis effectuons la division suivant les puissances croissantes de S_n par B à l'ordre 0 : on obtient une constante k et un polynôme T tels que $S_n = kB+XT$. On conclut que $A = BQ_n+kBX^{n+1}+X^{n+2}T$ et donc qu'on peut prendre $Q_{n+1} = Q_n + kX^{n+1}$ et $S_{n+1} = T$ pour répondre à la question.
◇ Preuve de l'unicité : Supposons qu'on ait deux écritures

$$A = BQ_n^{(1)} + X^{n+1}S_n^{(1)}$$

et

$$A = BQ_n^{(2)} + X^{n+1}S_n^{(2)}$$

remplissant les conditions $\deg Q_n^{(1)} \leq n$ et $\deg Q_n^{(2)} \leq n$.
Posons alors $Q_n = Q_n^{(1)} - Q_n^{(2)}$ et $S_n = S_n^{(1)} - S_n^{(2)}$ de telle sorte que $0 = BQ_n + X^{n+1}S_n$ avec en outre la condition $\deg Q_n \leq n$. Comme on a supposé $B(0) \neq 0$, X ne figure pas parmi les facteurs irréductibles de B, donc X^{n+1} est premier avec B. Mais d'après l'identité $BQ_n = -X^{n+1}S_n$, X^{n+1} divise BQ_n : on en déduit donc que X^{n+1} divise Q_n (lemme de Gauss) ; vu la condition sur le degré de Q_n, ceci entraîne que $Q_n = 0$. D'où $0 = X^{n+1}S_n$ et donc $S_n = 0$. Les deux écritures fournies de A étaient donc la même.

2. Pour diviser $A = 1 + X$ par $B = 1 + X^2$, on écrit

$$\begin{array}{llll|l}
1+ & X & & & 1+X^2 \\
 & & & & \overline{} \\
1+ & & +X^2 & & 1+X-X^2 \\ \hline
 & X & -X^2 & & \\
 & X & & +X^3 & \\ \hline
 & & -X^2 & -X^3 & \\
 & & -X^2 & & -X^4 \\ \hline
 & & & -X^3 & +X^4
\end{array}$$

Ce qui fournit la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre $n = 2$:

$$1 + X = (1 + X^2)(1 + X - X^2) + X^3(X - 1).$$

D'où la décomposition en élément simple :

$$\frac{1+X}{X^3(1+X^2)} = \frac{(1+X^2)(1+X-X^2) + (X^3(X-1)}{X^3(1+X^2)} = \frac{1}{X^3} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{X} + \frac{X-1}{X^2+1}.$$

Exercice 5

1. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ tels que $\lambda_0 + \lambda_1\alpha + \lambda_2\alpha_2 = 0$ (1). Puisque $\alpha^3 = 2$ on en déduit $\lambda_0\alpha + \lambda_1\alpha^2 + 2\lambda_2 = 0$ (2). Ces deux relations permettent de calculer $\alpha = \dfrac{2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_0\lambda_2}$ qui serait rationnel. Le cas $\lambda_1^2 - \lambda_0\lambda_2$ conduit à $\lambda_0^2 = 2\lambda_1\lambda_2$, puis $\lambda_1^3 = 2\lambda_2^3$, ce qui est impossible. Donc $1, \alpha, \alpha^2$ sont linéairement indépendants.

2. L'addition sur L a les propriétés de groupe. Vérifions qu'il y a stabilité dans $\mathbb{R}$ pour la multiplication. En effet, si $x = a + b\alpha + c\alpha^2$ et $x' = a' + b'\alpha + c'\alpha^2$ sont deux éléments de L, on a :

$$xx' = (aa' + 2bc' + 2b'c) + (ab' + a'b + 2cc')\alpha + (ac' + a'c + bb')\alpha^2 \quad (3).$$

Donc $xx' \in L$.
L est donc un sous-anneau de $\mathbb{R}$, en particulier L est intègre.

3. Soit $x \in L^* = L \setminus \{0\}$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & L & \longrightarrow & L \\ & y & \longmapsto & xy \end{array}$$

est linéaire(endomorphisme de l'espace vectoriel L). Elle est de plus injective :

$$\varphi(y) = \varphi(z) \Rightarrow xy = xz \Rightarrow y = z$$

car L est intègre. En dimension finie tout endomorphisme injectif est aussi bijectif. Il en résulte que l'équation $xy = 1$ admet une solution, et une seule, d'où L est un corps.

On peut calculer l'inverse x' de x en utilisant (3). On est conduit à résoudre le système linéaire en a', b', c' :

$$\begin{cases} aa' + 2bc' + 2b'c & = 1 \\ ab' + a'b + 2cc' & = 0 \\ ac' + a'c + bb' & = 0 \end{cases}$$

On obtient les valeurs

$$a' = \frac{a^2 - 2bc}{\Delta}, \quad b' = \frac{2c^2 - ab}{\Delta}, \quad c' = \frac{b^2 - ac}{\Delta},$$

en posant $\Delta = a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc$.

●●●●●●●●●●●