

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

.....

Partie A : Description des formes linéaires de $\mathbb{R}^n$

1. (a) Comme $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ses coordonnées dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ sont $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. On a donc $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$.

$$f(u) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

- (b) Les applications f_1 et f_2 ont même ensemble de départ $\mathbb{R}^n$ et même ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$. Il reste à montrer que $f_1(u) = f_2(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ pour établir $f_1 = f_2$. Soit $u = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. En procédant comme dans la question précédente, on montre que :

$$f_1(u) = x_1 f_1(e_1) + \dots + x_n f_1(e_n) \text{ et } f_2(u) = x_1 f_2(e_1) + \dots + x_n f_2(e_n).$$

Comme par hypothèse :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_1(e_i) = f_2(e_i)$$

On déduit $f_1(u) = f_2(u)$.

2. (a) L'application f ayant pour ensemble de départ $\mathbb{R}^n$ et pour ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$, il reste à établir son caractère linéaire pour obtenir que c'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} f(\lambda u + \mu v) &= f(\lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(y_1, \dots, y_n)) \\ &= f(\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n) \\ &= a_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + \dots + a_n(\lambda x_n + \mu y_n) \\ &= \lambda(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) + \mu(a_1 y_1 + \dots + a_n y_n) \\ &= \lambda f(x_1, \dots, x_n) + \mu f(y_1, \dots, y_n) \\ &= \lambda f(u) + \mu f(v). \end{aligned}$$

- (b) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$f(e_i) = f(0, \dots, 1, 0, \dots, 0) = a_1 \times 0 + \dots + a_{i-1} \times 0 + a_i \times 1 + a_{i+1} \times 0 + \dots + a_n \times 0 = a_i.$$

3. On pose :

$$\mathcal{L}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \left\{ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \end{array} / (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

$\square$ Montrons que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que pour toute forme linéaire f sur $\mathbb{R}^n$, il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que f coïncide avec l'application : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$. Cette assertion a en fait déjà été établie en A-1.(a).

$\supset$ Montrons que $\mathcal{L}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, c'est-à-dire que pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, l'application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Cette assertion a en fait déjà été établie en A-2.(a).

4. Il s'agit de montrer que φ est linéaire et bijective.

- φ est linéaire : Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + \mu g) &= ((\lambda f + \mu g)(e_1), \dots, (\lambda f + \mu g)(e_n)) \\ &= (\lambda f(e_1) + \mu g(e_1), \dots, \lambda f(e_n) + \mu g(e_n)) \\ &= \lambda(f(e_1), \dots, f(e_n)) + \mu(g(e_1), \dots, g(e_n)) \\ &= \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g). \end{aligned}$$

- φ est injective : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que $\varphi(f) = 0$, donc $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = 0$. Alors d'après A-1.(b), $f = 0$.

- φ est surjective : Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On veut montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que $\varphi(f) = (a_1, \dots, a_n)$, c'est-à-dire $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (a_1, \dots, a_n)$. On définit l'application f par :

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n.$$

D'après A-2.(a), $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et d'après A-2.(b), on a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = a_i$, c'est-à-dire $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (a_1, \dots, a_n)$.

5. D'après la question précédente, les espaces vectoriels $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ sont isomorphes. De plus $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie et $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. On en déduit que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est de dimension finie et que $\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) = n$.
6. (a) D'après la A-2.(a), l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. Elle est non nulle car $f(1, 1, 1) = 2 \neq 0$.

- (b) D'après la A-2.(a), l'application

$$f : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_7) \mapsto x_1 + 8x_2 + x_3 - x_5 + 12x_7$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^7$. Elle est non nulle car $f(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) = 1 \neq 0$.

Partie B : Hyperplan de $\mathbb{R}^n$ et noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$

1. • Montrons que $f \neq 0 \Rightarrow f$ est surjective :

Soit f une forme linéaire non nulle. Son image $\text{Im}(f)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}$, qui est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 1. Donc $\text{Im}(f)$ est de dimension finie et $\dim(\text{Im}(f)) \in \{0, 1\}$. Si $\dim(\text{Im}(f)) = 0$, alors $\text{Im}(f) = \{0\}$ et par suite $f = 0$ (contradiction). Donc $\dim(\text{Im}(f)) = 1$. $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, espace vectoriel de dimension finie, et $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R})$. On a donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. Par suite f est surjective.

- Montrons que f est surjective $\Rightarrow \ker(f)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$:

Comme f est surjective, on a $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. Par suite, $\text{Im}(f)$ est de dimension finie et $\dim(\text{Im}(f)) = 1$. Comme $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, le théorème du rang s'applique à f . On a donc :

$$\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Im}(f)) = n - 1.$$

Donc $\ker(f)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

- Montrons que $\ker(f)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n \Rightarrow f \neq 0$:

On raisonne par contraposition, c'est-à-dire on montre que : $f = 0 \Rightarrow \ker(f)$ n'est pas un hyperplan de $\mathbb{R}^n$: Supposons que $f = 0$. Alors on a bien sur $\ker(f) = \mathbb{R}^n$. Donc $\ker(f)$ est de dimension finie et $\dim(\ker(f)) = n \neq n - 1$.

2. (a) H' est un supplémentaire de H dans $\mathbb{R}^n$, donc

$$\dim H' + \dim H = \dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

On sait que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, donc $\dim H = n - 1$ et on en déduit que $\dim H' = n - (n - 1) = 1$. Or deux espaces vectoriels de même dimension finie sont isomorphes, et $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 1. Donc H' et $\mathbb{R}$ sont isomorphes.

- (b) On note p la projection sur H' parallèlement à H . p est bien définie comme une application de $\mathcal{L}(E, E)$ car H' et H sont supplémentaires dans E . De plus, $\text{Im}(p) = H'$.

On peut donc considérer l'application $f = \psi \circ p$: c'est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ (car composée des deux applications linéaires p suivie de ψ , avec $\text{Im}(p)$ inclus dans l'ensemble de départ de ψ).

Montrons que l'on a $\ker(f) = H$.

- Soit $x \in H$. On a $p(x) = 0$ donc $f(x) = \psi(0) = 0$. Donc $x \in \ker(f)$. On a montré que $H \subset \ker(f)$.

- Soit $x \in \ker(f)$. x est un élément de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n = H' \oplus H$. On écrit $x = u + v$ avec $(u, v) \in H' \times H$. On a alors $p(x) = u$ et enfin $f(x) = \psi(u)$. Or $x \in \ker(f)$ donc $f(x) = 0$. On en déduit que $\psi(u) = 0$. Or ψ est un isomorphisme de H' dans $\mathbb{R}$, donc $\ker(\psi) = \{0\}$. Cela signifie que $\psi(u) = 0$, donc $x = v \in H$. On a montré que $\ker(f) \subset H$.

- Par double inclusion, on conclut que $\ker(f) = H$.

3. La question B.1. prouve l'implication suivante : Le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ non nulle est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.
La question B.2. prouve que pour tout hyperplan, il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\ker(f) = H$. De plus f est non nulle sinon son noyau serait $\mathbb{R}^n$ et non H .
4. (a) On pose

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) &\longmapsto x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{aligned}$$

f est une forme linéaire d'après la question A.2. De plus $H = \ker(f)$ d'après la définition de H .

- (b) On a $f(1, 0, 0, 0) = 1$, donc f est non nulle.
(c) D'après la question B.3., H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, puisque c'est le noyau d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, non nulle.

Partie C : Équations d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$

1. On définit une forme linéaire

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\longmapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \end{aligned}$$

Justifions que f est non nulle : le n -uplet $(a_1, \dots, a_n)$ est non nul, donc il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_i \neq 0$. On a alors $f(e_i) = a_i \neq 0$ donc f n'est pas l'application nulle. Ainsi on peut appliquer le résultat du B.3. pour dire que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

2. H est un hyperplan, donc d'après le B.3. il existe $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, f non nulle, tel que $H = \ker(f)$.
D'après la partie A, il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n$. Le n -uplet $(a_1, \dots, a_n)$ est différent de $(0, \dots, 0)$, sinon f serait l'application nulle, ce qui est exclu. Donc $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

$$(x_1, \dots, x_n) \in H \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0.$$

On a donc montré que $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$.

3. Tout hyperplan H admet une équation cartésienne (E) de la forme $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Réciproquement, toute partie de $\mathbb{R}^n$ définie par une équation (E) de ce type est un hyperplan.

4. (a) La famille $(u_1, \dots, u_{n-1})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, elle contient $n-1$ vecteurs, et $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. De plus, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base donc une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$. Le théorème de la base incomplète permet d'affirmer que toute famille libre de $\mathbb{R}^n$ peut être complétée en une base de $\mathbb{R}^n$, en prenant des vecteurs d'une famille génératrice quelconque de $\mathbb{R}^n$.

On peut donc dire que l'on peut compléter $(u_1, \dots, u_{n-1})$ en une base grâce à un vecteur de $\mathcal{B}$: il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $(u_1, \dots, u_{n-1}, e_i)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

- (b) On écrit $u = \sum_{k=1}^{n-1} y_k u_k + z e_i$ et on applique f , qui est linéaire :

$$f(u) = \sum_{k=1}^{n-1} y_k f(u_k) + z f(e_i).$$

Or $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $u_k \in H = \ker(f)$ donc $f(u_k) = 0$. On conclut que $f(u) = z f(e_i)$.

Sachant que $H = \ker(g)$, on montre de même que $g(u) = z g(e_i)$.

- (c) $f(e_i) \in \mathbb{R}$ car f est une forme linéaire. De plus, si on avait $f(e_i) = 0$ alors on aurait $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $f(u) = 0$ donc $f = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $f(e_i) \neq 0$. On a montré que $f(e_i) \in \mathbb{R}^*$. Et de la même façon, on montre que $g(e_i) \in \mathbb{R}^*$.

- (d) On pose alors $\lambda = \frac{g(e_i)}{f(e_i)}$. D'après la question précédente, ce réel est bien défini et non nul.

Soit $u \in \mathbb{R}^n$, comme dans la question 4.b), on note $(y_1, \dots, y_{n-1}, z)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

On a alors $g(u) = z g(e_i) = z \lambda f(e_i) = \lambda f(u)$, donc pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $g(u) = \lambda f(u)$. On a prouvé que $g = \lambda f$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda f$.

5. Supposons que (E') est une equation de H . On définit $g : (x_1, \dots, x_n) \mapsto a'_1 x_1 + \dots + a'_n x_n$ et $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ deux formes linéaires non nulles.

Puisque (E) est une equation de H , on sait aussi que $H = \ker(f)$ et, l'hypothèse se traduit par $\ker(g) = H$. On a donc $\ker(f) = \ker(g)$, donc avec la question 4. on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda f$. On en déduit que $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $g(u) = \lambda f(u)$ et en particulier pour les vecteurs de la base canonique, on obtient pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(e_i) = \lambda f(e_i)$ donc $a'_i = \lambda a_i$. On a ainsi montré qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(a'_1, \dots, a'_n) = \lambda(a_1, \dots, a_n)$. Réciproquement, on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a'_1, \dots, a'_n) = \lambda(a_1, \dots, a_n)$. Soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} u \in H &\Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda a_1 x_1 + \dots + \lambda a_n x_n = 0 \\ &\Leftrightarrow a'_1 x_1 + \dots + a'_n x_n = 0 \end{aligned}$$

Ceci prouve que (E') est une equation de H .

6. (a) Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$ (1).

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

La famille (u_1, u_2, u_3) est libre. Elle est génératrice de H , c'en est donc une base. H admet donc une base composée de 3 vecteurs, $\dim H = 3$ et c'est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

- (b) On cherche une equation de H (dans la base canonique) sous la forme

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0,$$

ou a_1, a_2, a_3, a_4 sont des réels non tous nuls à déterminer.

Pour cela utilisons la base de H que nous avons trouvée :

- $u_1 \in H$ donc $a_1 + a_3 = 0$,
- $u_2 \in H$ donc $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$,
- $u_3 \in H$ donc $a_1 + a_3 = 0$.

Grâce a ces trois equations, on sait que l'on a nécessairement $a_1 = a_3 = 0$ et $a_2 + a_4 = 0$. On choisit alors $a_2 = 1$ et $a_4 = -1$.

L'équation obtenue est $x_2 - x_4 = 0$. On a $H \subset \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_2 - x_4 = 0\}$ d'après nos calculs. De plus, ces deux espaces sont des hyperplans, donc ils ont même dimension. L'inclusion implique alors l'égalité. En conclusion, H admet pour equation dans la base canonique, $x_2 - x_4 = 0$.

- (c) D'après la question 5., on sait que les equations de H sont de la forme $\lambda x_2 - \lambda x_4 = 0$, avec un $\lambda \in \mathbb{R}$.

Partie D : Intersection d'hyperplans de $\mathbb{R}^n$

1. (a) Supposons que $H_1 = H_2$. On a alors $H_1 \cap H_2 = H_1$ donc $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1) = n - 1$. Réciproquement, supposons que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1$. On sait que $H_1 \cap H_2 \subset H_1$ et les deux espaces ont même dimension, donc ils sont égaux : $H_1 \cap H_2 = H_1$. De même, on montre que $H_1 \cap H_2 = H_2$, ainsi on obtient $H_1 = H_2$.

En conclusion, on a montré

$$H_1 = H_2 \Leftrightarrow \dim(H_1 \cap H_2) = n - 1.$$

- (b) On a $H_1 \cap H_2 \subset H_1$ et $\dim H_1 = n - 1$ donc

$$\dim(H_1 \cap H_2) \leq n - 1.$$

Pour montrer l'autre inégalité, on utilise la formule :

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2),$$

ou encore

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2).$$

On sait que $H_1 + H_2 \subset \mathbb{R}^n$ donc $\dim(H_1 + H_2) \leq n$, et on peut écrire

$$\begin{aligned} -n \leq -\dim(H_1 + H_2) &\Rightarrow n - 1 + n - 1 - n \leq \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) \\ &\Rightarrow n - 2 \leq \dim(H_1 \cap H_2). \end{aligned}$$

On a donc montré que

$$n - 2 \leq \dim(H_1 \cap H_2).$$

(c) Supposons que $H_1 \neq H_2$.

Dans ce cas on a $\dim(H_1 \cap H_2) \neq n - 1$ d'après le (a) et $n - 2 \leq \dim(H_1 \cap H_2) \leq n - 1$ d'après le (b). On peut donc conclure que si $H_1 \neq H_2$, alors $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

2. On définit l'hypothèse de récurrence suivante $\text{HR}(p)$:

« pour tout $(H_1, \dots, H_p)$ p -uplet d'hyperplans de $\mathbb{R}^n$, $n - p \leq \dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \leq n - 1$ »

◇ Pour $p = 2$, on a montré le résultat à la question 1.

◇ On suppose $\text{HR}(p)$. Soient $H_1, \dots, H_p, H_{p+1}$ $p + 1$ hyperplans de $\mathbb{R}^n$. On sait que $H_1 \cap \dots \cap H_p \cap H_{p+1} \subset H_1$ et que $\dim H_1 = n - 1$ d'où :

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p \cap H_{p+1}) \leq n - 1.$$

On note $F = H_1 \cap \dots \cap H_p$: c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et d'après l'hypothèse de récurrence, on sait que $n - p \leq \dim F$. On applique la formule de Grassmann pour obtenir

$$\dim(F \cap H_{p+1}) = \dim F + \dim H_{p+1} - \dim(F + H_{p+1}).$$

Comme $F + H_{p+1} \subset \mathbb{R}^n$, on a $\dim(F + H_{p+1}) \leq n$ donc $-n \leq -\dim(F + H_{p+1})$, et on reprend :

$n - p \leq \dim F$, $\dim H_{p+1} = n - 1$ et $-n \leq -\dim(F + H_{p+1})$ donc $n - p + n - 1 - n \leq \dim F \cap H_{p+1}$. On a donc montré que

$$n - p - 1 \leq \dim F \cap H_{p+1} = \dim(H_1 \cap \dots \cap H_p \cap H_{p+1}).$$

Cela constitue une preuve de $\text{HR}(p + 1)$.

D'après le principe de récurrence, on conclut que pour tout p entier supérieur ou égal à 2, pour tout $(H_1, \dots, H_p)$ p -uplet d'hyperplans de $\mathbb{R}^n$,

$$n - p \leq \dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \leq n - 1.$$

3. Lorsque $p \geq n$, le résultat obtenu nous donne $0 \leq \dim(H_1 \cap \dots \cap H_p)$, pour $H_1, \dots, H_p$ p hyperplans de $\mathbb{R}^n$. Mais la dimension d'un espace vectoriel est un entier naturel, cette minoration n'apporte donc rien dans ce cas.

4. (a) Prenons $H_1 = H_2 = H_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 0\}$. On a alors bien $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = 2$. Les trois hyperplans sont confondus, et on peut justifier (sur le modèle de 1.(a)) que c'est la seule possibilité pour avoir leur intersection de dimension 2.

(b) Prenons $H_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 0\}$, $H_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = 0\}$ et $H_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = 0\}$. Dans ce cas, on a $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \text{Vect}((0, 0, 1))$. On a alors bien $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = 1$.

$\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = 1$ se traduit par le fait que les trois plans s'intersectent suivant une droite vectorielle.

(c) Prenons $H_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 0\}$, $H_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = 0\}$ et $H_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 = 0\}$. Dans ce cas, on a $H_1 \cap H_2 \cap H_3 = \{(0, 0, 0)\}$, donc $\dim(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = 0$.

Partie E : Ensemble solution d'un système linéaire homogène (SLH) d'inconnue dans $\mathbb{R}^n$

1. (a) On pose pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \end{aligned}$$

On définit ainsi p formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ (d'après la question A.3.). De plus, pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire

$$(x_1, \dots, x_n) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, (x_1, \dots, x_n) \in \ker(f_i)$$

Ainsi, on a montré que $F = \bigcap_{i=1}^p \ker(f_i)$.

(b) On sait que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ de l'application. Donc pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\ker(f_i)$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. De plus, l'intersection d'une famille de sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

- (c) i. On a pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $f(u) = 0$, donc $\forall u \in \mathbb{R}^n$, $u \in \ker(f)$. On traduit ceci par l'inclusion $\mathbb{R}^n \subset \ker(f)$. Puisque $\ker(f) \subset \mathbb{R}^n$ (comme sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$), on obtient $\ker(f) = \mathbb{R}^n$.
- ii. Parmi les formes linéaires f_i définies dans le (a), certaines peuvent être nulles. Mettons les de côté : on suppose qu'il y a l formes linéaires nulles dans la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$. On a $0 \leq l \leq p$.
- Premier cas : si $l = p$, alors pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_i = 0$ et $\ker(f_i) = \mathbb{R}^n$ (d'après le (c)i), donc $F = \mathbb{R}^n$ et $\dim F = n$.
 - Deuxième cas : si $l = 0$ alors, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\ker(f_i)$ est un hyperplan car f_i est une forme linéaire non nulle. Donc F est l'intersection de p hyperplans, et en utilisant la question D.2, on déduit que

$$n - p \leq \dim(F) \leq n - 1.$$

- Troisième cas : si $0 < l < p$ alors quitte à changer l'ordre des formes linéaires choisies en (a) (cela veut dire qu'on change leur nom ou l'ordre des lignes dans le système ce qui ne change pas F), on peut supposer que ce sont les l premières qui sont nulles. On a donc

$$\ker(f_1) = \ker(f_2) = \dots = \ker(f_l) = \mathbb{R}^n,$$

donc ces noyaux n'interviennent plus dans l'intersection décrivant F :

$$F = \bigcap_{i=l+1}^p \ker(f_i).$$

Les formes linéaires restantes étant non nulles, leurs noyaux sont des hyperplans, il y en a $p - l$ dans l'intersection, et on obtient $n - (p - l) \leq \dim F \leq n - 1$ par la question D.2.. On a $n - p \leq n - p + l$ et $n - 1 \leq n$, ce qui permet de conclure que $n - p \leq \dim(F) \leq n$. En conclusion, dans tous les cas, on a montré que

$$n - p \leq \dim F \leq n.$$

2. (a) Voici le système (S) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

(b) En appliquant ce qui précède, dans le cas $n = 4$ et $p = 3$, on peut affirmer que $4 - 3 \leq \dim F \leq 4$, soit $1 \leq \dim F \leq 4$.

(c) On travaille sur le système par la méthode du pivot de Gauss pour le rendre échelonné.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ -4x_1 + 12x_2 - 16x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{matrix}$$

Le système est maintenant échelonné et il comporte 2 lignes (il est de rang 2), 4 inconnues : on choisit deux paramétrés, par exemple x_2 et x_4 , et on achève la description :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 5x_2 + 3x_4 \\ x_1 = 3x_2 - 4x_4 \end{cases}$$

De ceci, on déduit une famille génératrice de F : $u_1 = (3, 1, 5, 0)$ et $u_2 = (4, 0, 3, 1)$. C'est aussi une famille libre, et donc (u_1, u_2) forme une base de F .

(d) On a trouvé une base de F comportant deux vecteurs, donc F est de dimension 2.

Partie F : Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble solution d'un SLH d'inconnue dans $\mathbb{R}^n$

1. (a) On sait que $0 \leq \dim F \leq \dim(\mathbb{R}^n) = n$. On sait que $\dim F = 0 \Leftrightarrow F = \{0\}$, or $F = \{0\}$ donc $\dim F = 0$. On sait que $F \subset \mathbb{R}^n$ et $\dim F = n \Leftrightarrow F = \mathbb{R}^n$, or $F \neq \mathbb{R}^n$ donc $\dim F \neq n$. En conclusion, on a $1 \leq p \leq n-1$.
- (b) i. La famille $(u_1, \dots, u_p)$ contient p vecteurs, $\mathbb{R}^n$ est de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ en est une base. Le théorème de la base incomplète permet d'affirmer qu'il existe $n-p$ vecteurs pris parmi $(e_1, \dots, e_n)$ permettant de former une base de $\mathbb{R}^n$ avec $u_1, \dots, u_p$. Il existe donc $n-p$ indices, notés $i_1, \dots, i_{n-p}$ tels que $(u_1, \dots, u_p, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-p}})$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

ii. On écrit $u = \sum_{i=1}^p y_i u_i + \sum_{l=1}^{n-p} z_l e_{i_l}$ et on applique g_k , qui est linéaire.

$$\begin{aligned} g_k(u) &= g_k \left(\sum_{i=1}^p y_i u_i + \sum_{l=1}^{n-p} z_l e_{i_l} \right) \\ &= \sum_{i=1}^p y_i g_k(u_i) + \sum_{l=1}^{n-p} z_l g_k(e_{i_l}) \\ &= z_k g_k(e_{i_k}) \text{ car } g_k \text{ est nul en tout autre } e_{i_l} \text{ que } e_{i_k} \\ &= z_k. \end{aligned}$$

- (c) i. • Supposons $u \in F$, on a $u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et u est de coordonnées $(y_1, \dots, y_p, z_1, \dots, z_{n-p})$ dans la base $\mathcal{C}$. Par unicité des coordonnées dans une base, on en déduit que $z_1 = \dots = z_{n-p} = 0$.

• Supposons que $z_1 = \dots = z_{n-p} = 0$. On a aussi $u = \sum_{i=1}^p y_i u_i + \sum_{l=1}^{n-p} z_l e_{i_l}$, donc $u = \sum_{i=1}^p y_i u_i$. Ceci

prouve que $u \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. Ainsi, $u \in F$.

En conclusion, $u \in F \Leftrightarrow z_1 = \dots = z_{n-p} = 0$.

Montrons alors la deuxième équivalence :

$$\begin{aligned} z_1 = \dots = z_{n-p} = 0 &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n-p \rrbracket, \quad g_k(u) = 0, \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n-p \rrbracket, \quad u \in \ker(g_k), \\ &\Leftrightarrow u \in \bigcap_{k=1}^{n-p} \ker(g_k). \end{aligned}$$

ii. Les équivalences permettent de conclure que les ensembles sont égaux, donc :

$$F = \ker(g_1) \cap \dots \cap \ker(g_{n-p}).$$

(d) On sait que $F = \ker(g_1) \cap \dots \cap \ker(g_{n-p})$. On définit pour chaque $k \in \llbracket 1, n-p \rrbracket$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$a_{ki} = g_k(e_i)$. Ainsi, en utilisant la question A.1., pour $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $g_k(u) = \sum_{i=1}^n a_{ki} x_i$, pour

$k \in \llbracket 1, n-p \rrbracket$.

On en déduit alors que

$$u = (x_1, \dots, x_n) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \vdots & \\ a_{n-p1}x_1 + a_{n-p2}x_2 + \dots + a_{n-pn}x_n &= 0. \end{cases}$$

F est donc l'ensemble des solutions de ce système linéaire homogène d'inconnue dans $\mathbb{R}^n$.

2. (a) Montrons que la famille (u_1, u_2) est libre. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on suppose que $\lambda u_1 + \mu u_2 = 0$.

$$\lambda u_1 + \mu u_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \\ \lambda + 3\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.$$

On a montré que $\lambda = \mu = 0$, et on conclut que la famille est libre. La famille (u_1, u_2) est libre et génératrice de F , c'en est donc une base de F .

- (b) • On commence par compléter la base de F . Pour cela on cherche trois vecteurs de la base canonique tels que la famille formée avec u_1 et u_2 sera libre. On prend par exemple e_1, e_2, e_3 et on vérifie que la famille est libre. La base $\mathcal{C}$ sera $(u_1, u_2, e_1, e_2, e_3)$.

• On cherche ensuite les formes linéaires g_1, g_2, g_3 définies comme en F.1.(b). Détaillons la recherche de g_1 :

◊ Les conditions sont $g_1(u_1) = g_1(u_2) = g_1(e_2) = g_1(e_3) = 0$ et $g_1(e_1) = 1$.

◊ On cherche $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$ tels que

$$g_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5.$$

On est ramené à la résolution d'un système

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + a_5 = 0, \\ 3a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 3a_5 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = 0. \end{cases}$$

On le résout pour obtenir $a_1 = 1, a_2 = a_3 = a_4 = 0$ et $a_5 = 1$. Ainsi $g_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 - x_5$ et la première équation cherchée est $x_1 - x_5 = 0$. De la même manière, on trouve les deux autres équations correspondant à g_2 et g_3 . Le système linéaire homogène décrivant F est

$$\begin{cases} x_1 - x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

On vérifiera que les vecteurs u_1 et u_2 vérifient effectivement ces équations !

Partie G : Description des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

On a montré ce résultat, à l'exclusion des cas des sous-espaces vectoriels $\{(0, \dots, 0)\}$ et $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^n$. Pour le premier $\{(0, \dots, 0)\}$, on pourra le décrire par un système tel que

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ \vdots \\ x_n = 0. \end{cases}$$

Pour le second $\mathbb{R}^n$, on prendra un système avec une seule ligne $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$.

•••••