Devoir libre $n\circ 3$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

Commutant et décomposition de Dunford d'un endomorphisme

1. $E'_{\lambda_i}(u)$ est le noyau d'un endomorphisme polynôme en u, donc c'est un sous-espace vectoriel de E et stable par u.
Par le théorème de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient :

$$\ker \chi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(u - \lambda_i Id_E)^{m_i},$$

ou encore

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E'_{\lambda_i}(u).$$

2. (a) $(X-\lambda_i)^{m_i}$ est un polynôme annulateur de v_i, de plus χ_{v_i} divise χ_u, donc χ_{v_i} est scindé et sa seule racine est λ_i, donc $\chi_{v_i} = (X-\lambda_i)^{\dim E'_{\lambda_i}(u)}$.

(b) On a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E'_{\lambda_i}(u)$ et $E'_{\lambda_i}(u)$ est stable, donc $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} \chi_{v_i} = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\dim E'_{\lambda_i}(u)}$. Par unicité de la multiplicité de la racine λ_i, on a $m_i = \dim E'_{\lambda_i}(u)$.

3. Il faut vérifier les points suivants :

- $\forall v \in \mathscr{L}(E)$, $\Gamma_u(v) \in \mathscr{L}(E)$.
- $\forall v, w \in \mathscr{L}(E)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\Gamma_u(v+\lambda w) = \Gamma_u(v) + \lambda\Gamma_u(w)$.

4. (a) On a, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $u^k \circ u = u \circ u^k$, donc $\mathrm{Vect}(Id_E, u, ..., n^{n-1}) \subset \mathscr{C}(u)$. On a $n \geq 2$.
• Si $\{Id_E, u\}$ est libre, alors $\dim \mathscr{C}(u) \geq \dim \mathrm{Vect}\{Id_E, u\} \geq 2$.
• Si $\{Id_E, u\}$ est liée, alors u est une homothétie et par suite $\mathscr{C}(u) = \mathscr{L}(E)$, d'où

$$\dim \mathscr{C}(u) = n^2 \geq 2.$$

(b) $E_{\lambda_i}(u) = \ker(u - \lambda Id_E)$ et $u - \lambda Id_E$ commute avec v, donc $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v.

5. (a) Du cours

(b) D'après 4b, $\mathscr{C}(u) \subset \{v / \forall i \in [\![1,p]\!],\ \ v(E_{\lambda_i}(u)) \subset E_{\lambda_i}(u)\}$. Inversement, soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\forall i = 1, ..., p$, $v\left(E_{\lambda_i}(u)\right) \subset E_{\lambda_i}(u)$. Pour $x \in E_{\lambda_i}(u)$, on a :

$$u \circ v(x) = u(v(x)) = \lambda_i v(x)$$

et

$$v \circ u(x) = \lambda_i v(x).$$

Donc les deux endomorphismes $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur $E_{\lambda_i}(u)$ pour tout $i = 1, ..., p$. Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E'_{\lambda_i}(u)$, alors $u \circ v = v \circ u$ et donc $v \in \mathscr{C}(u)$.

(c) Soit alors l'application ϕ définie par :

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(u) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E_{\lambda_1}(u)) \times ... \times \mathscr{L}(E_{\lambda_p}(u)) \\ v & \longmapsto & (v_1, ..., v_p) \end{array} \right.$$

avec $v_i = v|_{E_{\lambda_i}(u)} \in \mathscr{L}(E_{\lambda_i}(u))$.

ϕ est linéaire bijective, de bijection réciproque $(v_1, ..., v_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} v_i \circ p_i = v$ avec $(p_1, p_2, ..., p_p)$ le système de projecteurs associé à u : $p_i : E \to E_{\lambda_i}(u)$. D'où $\mathscr{C}(u)$ est isomorphe à $\mathscr{L}(E_{\lambda_1}(u)) \times ... \times \mathscr{L}(E_{\lambda_p}(u))$, et donc

$$\dim \mathscr{C}(u) = \sum_{i=1}^{p} \dim \mathscr{L}(E_{\lambda_i}(u)) = \sum_{i=1}^{p} m_i^2.$$

6. L'endomorphisme u est diagonalisable et chaque valeur propre est simple, c'est qu'il y a n valeurs propres distincts, c'est-à-dire que $p = n$. Donc $\dim \mathscr{C}(u) = \sum_{i=1}^{n} 1^2 = n$.

On a $\prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ divise π_u et π_u divise χ_u. Donc $\deg \pi_u = n$, par suite $(Id_E, u, ..., u^{n-1})$ est une famille libre de $\mathscr{C}(u)$ qui est de dimension n. Donc la famille $(Id_E, u, ..., u^{n-1})$ est une base de $\mathscr{C}(u)$ et $\mathscr{C}(u) = (Id_E, u, ..., u^{n-1})$.

7. (a) On a $\Gamma_u^2(v) = v \circ u^2 - 2u \circ v \circ u + u^2 \circ v$ et $\Gamma_u^3(v) = v \circ u^3 - 3u \circ v \circ u^2 + 3u^2 \circ v \circ u - 3u^3 \circ v$. Donc comme pour la formule de binome, et par récurrence, on montre que :

$$\Gamma_u^k(v) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \complement_k^i u^i \circ v \circ u^{k-i}.$$

(b) Soit p tel que $u^p = 0$. Donc

$$\Gamma_u^{2p}(v) = \sum_{i=0}^{2p} (-1)^k \complement_{2p}^i u^i \circ v \circ u^{2p-i}.$$

- pour $i \geq p$, $u^i \circ v \circ u^{2p-i} = 0$,
- pour $i < p$, alors $2p - i > p$ et donc aussi $u^i \circ v \circ u^{2p-i} = 0$, d'où

$$\Gamma_u^{2p} = 0.$$

8. (a) E'_{λ_i} est le noyau d'un polynôme en u, donc il est stable par v qui commute aussi avec ce polynôme en u.

(b) On a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E'_{\lambda_i}(u)$. Pour $x \in E'_{\lambda_i}(u)$ posons $\delta(x) = \lambda_i x$ et $\omega(x) = (u - \lambda_i Id_E)(x)$, c'est-à-dire δ et ω sont définis par $\delta = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i p'_i$ et $\omega = u - \delta$ où $(p'_1, p'_2, ..., p'_p)$ est la famille des projecteurs associée à $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E'_{\lambda_i}(u)$. On a dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à cette décomposition :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\delta) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Donc δ est diagonalisable et $\forall x \in E'_{\lambda_i}(u)$, $\omega^{m_i}(x) = 0$. Donc pour $m = \max\limits_{i=1}^{p}(m_i)$, $\omega^m = 0$, w est donc nilpotent.
Montrons maintenant que ω et δ sont des polynômes en u.
Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, posons $Q_i = \prod\limits_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{m_i}$. Il n'y a aucun facteur irréductible en commun entre les polynômes Q_i, donc ils sont premiers entre eux dans leurs ensemble. Par la formule de Bezout, il existe des polynômes U_i tels que

$$1 = \sum_{i=1}^{p} U_i Q_i.$$

Montrons maintenant que

$$p'_i = (U_i Q_i)(u).$$

Soit $j \neq i$ et $x \in E'_{\lambda_j}(u)$. Le facteur $(X - \lambda_j)^{m_i}$ apparait dans Q_i, donc $(U_i Q_i)(u)(x) = 0$. Par ailleurs $Id_E = \sum\limits_{i=1}^{p} (U_i Q_i)(u)$, donc si maintenant $x \in E'_{\lambda_i}(u)$, alors $x = (U_i Q_i)(u)(x)$. D'où $p'_i = (U_i Q_i)(u) \in \mathbb{K}[u]$. Or $\delta = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i p'_i$, donc $\delta \in \mathbb{K}[u]$. Comme $\omega = u - \delta$, alors ω est aussi un polynôme en u. Par conséquent on a $\delta \circ \omega = \omega \circ \delta$. Il est clair que

$$\mathscr{C}(\delta) \cap \mathscr{C}(\omega) \subset \mathscr{C}(u).$$

Maintenant si $v \in \mathscr{C}(u)$, comme δ et ω sont des polynômes en u, donc v appartient aussi à $\mathscr{C}(\delta) \cap \mathscr{C}(\omega)$.

(c) On vérifie facilement que $\chi_A = (X-1)^2(X+1)$, de plus $\ker(A - I)^2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ et $\ker(A + I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$.
Calculons les matrices P'_1 et P'_2 de p'_1 et p'_2 relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Posons $E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dans la base (E_1, E_2, E_3), X s'écrit $X = \alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3$. Dans ce cas $P'_1 X = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à calculer α en fonction de x, y et z.

$$\begin{cases} x = \beta \\ y = \alpha + \delta \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \quad \text{donc } \alpha = z - x.$$

$P'_1 X = \begin{pmatrix} 0 \\ -x+z \\ -x+z \end{pmatrix}$, d'où $P'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P'_2 = I_3 - P'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Notons D et N respectivement les matrices de δ et ω dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$D = \lambda_1 P'_1 + \lambda_2 P'_2 = P'_2 - P'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$N = A - D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a bien $ND = DN$ et donc $A^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k N^k D^{n-k}$. $N^2 = 0$, donc $A^n = D^n + \mathrm{C}_n^1 N D^{n-1}$. Les valeurs propres de D sont ceux de A donc $D = P \Delta P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Après tous les calculs !

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+n & n & -n \\ 1-(-1)^n & 1 & (-1)^n - 1 \\ 1+n-(-1)^n & n & (-1)^n - n \end{pmatrix}.$$

• • • • • • • • • • •