Devoir libre $n°8$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées[1].

Exercice I

1. • Démontrons d'abord que cette application est bien définie, c'est-à-dire que pour tout couple (P,Q) de $\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$ converge. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout polynome R de $\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$ converge.

$\diamond$ La fonction $t\mapsto R(t)e^{\frac{-t^2}{2}}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$.

$\diamond$ On a $|R(t)|e^{\frac{-t^2}{2}} \underset{\pm\infty}{\simeq} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ entraine la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$ converge.

• L'application $(P,Q)\mapsto(P|Q)$ est symétrique, car $(P|Q)=(Q|P)$ pour tout couple (P,Q) de polynômes, bilinéaire car elle est symétrique et linéaire par rapport à la première variable par linéarité de l'intégrale.

• Il reste à démontrer que $(P|P)>0$ pour tout polynôme P non nul. Comme P admet un nombre fini de racines, il n'est pas identiquement nul sur $[-1,1]$. La fonction $t\mapsto P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}$ est donc positive, continue, et non identiquement nulle sur $[-1,1]$, ce qui entraine

$$\int_{-1}^{1} P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t>0.$$

On en déduit alors

$$(P|P)=\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t\geq\int_{-1}^{1} P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t>0.$$

En conclusion, l'application $(P,Q)\mapsto(P|Q)$ étant bilinéaire, symétrique et définie positive, c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la propriété :

« H_n : Le polynôme G_n est unitaire de degré n ».

• Cette propriété est évidemment vérifie pour $n=0$.

• Supposons H_n vraie. Par définition de G_n, on a :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)=(-1)^n\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)G_n(t).$$

En dérivant par rapport à t, on obtient

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)=(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)\left(tG_n(t)-G_n'(t)\right).$$

On a donc

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad G_{n+1}(t)=tG_n(t)-G_n'(t).$$

Comme G_n est un polynôme de terme dominant t^n, on vérifie facilement que G_{n+1} est un polynôme de terme dominant t^{n+1}.

3. Pour $k\in[\![0,n]\!]$, on peut écrire

$$(G_n|t^k)=\int_{-\infty}^{+\infty} t^kG_n(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty} t^k\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)\mathrm{d}t.$$

1. Source : UPS concours maths

En intégrant par parties, on obtient

$$(G_n|t^k) = (-1)^n \left[t^k \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + (-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} kt^{k-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)\mathrm{d}t.$$

Par croissances comparées $\lim\limits_{t\to\pm\infty} t^k \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right) = 0$, par suite

$$(G_n|t^k) = (-1)^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} kt^{k-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)\mathrm{d}t.$$

Par itération, on obtient

$$(G_n|t^k) = (-1)^{n+k}\int_{-\infty}^{+\infty} k!\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}t^{n-k}}\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)\mathrm{d}t.$$

Deux cas se présentent alors.

• Si $k \in [0, n-1]$, alors

$$(G_n|t^k) = (-1)^{n+k}k!\left[\frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}t^{n-k-1}}\left(e^{\frac{-t^2}{2}}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

• Si $k = n$, alors

$$(G_n|t^n) = n!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = n!\sqrt{2\pi}.$$

4. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\quad (G_n|X^k) = 0$$

comme $G_n = X^n - F$, alors $(X^n - F|X^k) = 0$. Donc $X^n - F$ appartient à l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Comme $F \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, cela prouve que F est la projection orthogonale de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
D'après le cours, F est l'unique vecteur de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui réalise le minimum de la distance de X^n au sous-espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est-à-dire qui vérifie

$$\|X^n - F\|^2 = \inf_{Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]} \|X^n - Q\|^2$$

Or, d'après la définition de $\mathscr{U}$, on peut écrire

$$\inf_{Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]} \|X^n - Q\|^2 = \inf_{P\in\mathscr{U}} \|P\|^2 = \inf_{P\in\mathscr{U}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t$$

Donc

$$\inf_{P\in\mathscr{U}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = \|X^n - F\|^2 = (X^n - F|X^n - F)$$

Comme $X^n - F \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $(X^n - F|F) = 0$, donc

$$\inf_{P\in\mathscr{U}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = (X^n - F|X^n) = (G_n|X^n)$$

ce qui entraine, d'après le résultat de la question 3.

$$\inf_{P\in\mathscr{U}} \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{\frac{-t^2}{2}}\mathrm{d}t = n!\sqrt{2\pi}.$$

Exercice II

1. Puisque A est de rang p, l'application $X \mapsto AX$ qui va de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{Im}(A)$ est injective. Or,

$$\inf\{\|AX - B\|,\quad X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$$

est la distance de B à $\mathrm{Im}(A)$. Cette distance est atteinte uniquement au projeté orthogonal sur $\mathrm{Im}(A)$ (qui est de dimension finie) de B. Ce projeté orthogonal s'écrit de façon unique AX_0.

2. On a :

$$\begin{aligned}
AX_0 = p_{\mathrm{Im}(A)}(B) &\Leftrightarrow \forall Z \in \mathrm{Im}(A), AX_0 - B \perp Z & (1)\\
&\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX_0 - B \perp AX & (2)\\
&\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), (AX)^t(AX_0 - B) = 0 & (3)\\
&\Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), X^t(A^tAX_0 - ATB) = 0 & (4)\\
&\Leftrightarrow A^tAX_0 = A^tB. & (5)\\
& & (6)
\end{aligned}$$

X_0 est donc bien l'unique solution de $A^tAX = A^tB$.

3. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que le rang de A est 2. La borne inférieure est donc atteinte en $X_0 =^t (x_0, y_0)$ solution de $A^tAX_0 = A^tB$. Or $A^tAX0 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^tB = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $y_0 = 0$, et donc la borné inférieure recherché vaut $\dfrac{7}{2}$.

•••••••••