Devoir libre $n°9$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • • • • • • • •

Exercice I

1. Il est clair que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(0)$ converge et a pour somme 0. Fixons donc $x \neq 0$, on a $u_n(x) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{xn^2}$ qui est le terme général d'une série convergente (série de Riemann : 2 > 1). Comme en outre $\frac{1}{xn^2}$ est de signe constant (celui de x), il en résulte que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n(x)$ converge également. Finalement, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Comme u_n est impaire, il suffit d'étudier ses variations sur $\mathbb{R}^+$, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad u_n'(x) = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

u_n est donc positive et atteint son maximum en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ et vaut $u_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. De l'imparité de u_n, on déduit alors que $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. Comme $\frac{3}{2} > 1$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$ converge, autrement dit, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. En particulier, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, comme les u_n sont continues sur $\mathbb{R}$, il en résulte que la fonction somme S est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrons pour commencer que S est $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de la forme $[a, M]$ où $0 < a < M$:
• Les fonctions u_n sont $\mathscr{C}^1$ sur $[a, M]$,
• d'après 1, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge simplement sur $[a, M]$,
• $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n'$ converge uniformément sur $[a, M]$, en effet

$$\forall x \in [a, M], \quad |u_n'(x)| \leq \frac{1+nM^2}{n(1+na^2)^2}.$$

Autrement dit

$$\|u_n'\|_{\infty,[a,M]} \leq \frac{1+nM^2}{n(1+na^2)^2}.$$

Or $\frac{1+nM^2}{n(1+na^2)^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{M^2}{a^2n^2}$. Ainsi, $\|u_n'\|_{\infty,[a,M]}$ est majoré par le terme général d'une série numérique convergente (par comparaison à une série de Riemann, puisque $2 > 1$). Par conséquent, la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a, M]$. Le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions s'applique : la fonction somme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, M]$, pour tout (a, M) tel que $0 < a < M$, elle est donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$ et aussi sur $\mathbb{R}_*^-$ puisqu'elle est impaire. En particulier, S est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

4. (a) Pour tout réel x non nul et tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a, puisqu'il s'agit d'une série à termes positifs,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+nx^2)}$$

soit

$$\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x}.$$

On pose alors $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{N}}$ et, pour x tel que $0 < |x| < \alpha$, on a pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, $\quad nx^2 \leq N\alpha^2 = 1$, donc $0 < 1 + nx^2 \leq 2$, d'où $\dfrac{1}{1+nx^2} \geq \dfrac{1}{2}$ et, par sommation on obtient, pour tout x tel que $0 < |x| < \alpha$:

$$\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

(b) Soit $A > 0$, puisque la série harmonique diverge, il existe N dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} > A$. On déduit, grâce à la question précédente, l'existence de $\alpha > 0$ tel que $0 < |x| < \alpha$ entraine $\dfrac{S(x)}{x} > A$. Ainsi, $\mathbb{R}^*$ étant l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \dfrac{S(x)}{x}$:

$$\forall A > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |x| < \alpha \Rightarrow \frac{S(x)}{x} > A.$$

Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{x} = +\infty$.

(c) Comme $S(0) = 0$, $\dfrac{S(x)}{x}$ n'est autre que le taux de variation de la fonction S entre 0 et x, le résultat précédent signifie donc que S n'est pas dérivable en 0.
On peut préciser que le graphe de S admet une tangente en O portée par l'axe Oy.

Exercice II

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=1}^{p}\left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{p}[\ln(n+1) - \ln n] = \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln(p+1) - \ln 1 = \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln p - \ln\left(\frac{p+1}{p}\right)$$

Comme $\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$, la série de terme général $\dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ est convergente (par comparaison à une série de Riemann : $2 > 1$). De plus, $\ln\left(\dfrac{p+1}{p}\right) \underset{p\to\infty}{\to} 0$, or, d'après le calcul précédent,

$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln p = \sum_{n=1}^{p}\left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] + \ln\left(\frac{p+1}{p}\right).$$

On en déduit l'existence de la limite demandée et, par passage à la limite :

$$\gamma = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln p\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right].$$

2. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$, puisque t est positif, $-t \neq 1$ et on peux appliquer la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison $-t$:

$$\sum_{k=0}^{p}(-t)^k = \frac{1-(-t)^{p+1}}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{p+1}t^{p+1}}{1+t}$$

autrement dit :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, x], \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{p+1}t^{p+1}}{1+t}.$$

On en déduit, pour $p \in \mathbb{N}^*$, en intégrant de 0 à x et en réindexant la somme :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^{p+1}\int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t}\mathrm{d}t,$$

or, x étant dans $[0,1]$,

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{p+1}}{1+t}\mathrm{d}t \leq \int_0^x t^{p+1}\mathrm{d}t = \frac{x^{p+2}}{p+2} \leq \frac{1}{p+2}.$$

Le « reste » intégral a donc pour limite 0 lorsque p tend vers l'infini, il en résulte que la série de terme général $(-1)^{k-1}\dfrac{x^k}{k}$ converge et a pour somme $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}.$$

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, le résultat précédent s'applique avec $x = \dfrac{1}{n}$, d'où

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{kn^k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{kn^k} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k},$$

ce qui donne, reporté dans l'expression du 1) :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}.$$

4. (a) Les résultats sur la convergence des séries de Riemann montrent que ζ est définie sur $]1,+\infty[$, de plus, si $1 < \alpha < \alpha'$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^\alpha \geq n^{\alpha'}$, donc $\dfrac{1}{n^\alpha} \geq \dfrac{1}{n^{\alpha'}}$, d'où

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n^{\alpha'}}.$$

En passant à la limite lorsque p tend vers l'infini on obtient :

$$\zeta(\alpha) \geq \zeta(\alpha').$$

En conclusion (sans dérivation terme à terme. . .) : ζ est définie et décroissante sur $]1,+\infty[$.
Soient $x \in [1,+\infty[$ fixé et $k \in N$, $k \geq 2$, d'après la minoration ci-dessus (avec $\alpha = k$, $\alpha' = k+1$ et $p = E(x)$), on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{E(x)}\frac{1}{n^k} \geq \sum_{n=1}^{E(x)}\frac{1}{n^{k+1}}$, d'où, comme $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{k+1}$, $|f_k(x)| \geq |f_{k+1}(x)|$. De plus, puisque ζ est décroissante,

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{k}\zeta(k) \leq \frac{\zeta(2)}{k}.$$

Il en découle que $|f_k(x)|$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini, donc finalement la suite $(|f_k(x)|)_{k\geq 2}$ converge vers 0 en décroissant.

(b) Le résultat précédent montre que, pour tout $x \in [1,+\infty[$, la série alternée $\displaystyle\sum_{k\geq 2} f_k(x)$ vérifie les hypothèses du théorème spécial, donc converge, avec en outre la majoration du reste $R_p = \displaystyle\sum_{k=p+1}^{\infty} f_k$:

$$\forall p \geq 2, \quad \forall x \in [1,+\infty[, \quad |R_p(x)| \leq |f_{p+1}(x)| \leq \frac{\zeta(2)}{p+1},$$

d'où

$$\|R_p\|_{\infty,[1,+\infty[} \leq \frac{\zeta(2)}{p+1}.$$

Par conséquent la suite $(R_p)_{p\geq 2}$ converge uniformément vers 0 sur $[1,+\infty[$, c'est-à-dire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 2} f_k$ est uniformément convergente sur $[1,+\infty[$.

5. D'après le 3),

$$\gamma = \lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{E(x)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^k}.$$

Soit $x \geq 1$ fixé. Par linéarité de la somme dans l'espace des séries numériques convergentes, on a :

$$\sum_{n=1}^{E(x)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=1}^{E(x)} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^k} = \sum_{k=2}^{\infty} f_k(x).$$

donc

$$\gamma = \lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{E(x)} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^k} = \lim_{x\to\infty} \sum_{k=2}^{\infty} f_k(x).$$

Enfin, la série de fonctions $\sum_{k\geq 2} f_k$ convergeant uniformément sur $[1, +\infty[$, $+\infty$ étant adhérent à cet intervalle et chaque fonction f_k admettant une limite finie en $+\infty$ (à savoir $\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)$), on peut appliquer le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=2}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_k(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k).$$

D'où, en comparant les deux derniers résultats :

$$\gamma = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\zeta(k).$$

• • • • • • • • •