Devoir libre $n^\circ 10$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • • • • • • • •

1. On est dans une situation d'équiprobabilités, ces tirages s'effectuent avec remise, ils sont considérés comme indépendants.
$p(A_1) = \dfrac{1}{n+k}$ (il y a une seule boule portant le numéro 1.)
$p(A_2) = \dfrac{n-1}{n+k}$ (il y a $n-1$ boules portant un numéro strictement supérieur à 1.)
$p(A_3) = \dfrac{k}{n+k}$ (il y k boules numérotés.)

2. Les événements (A_1, A_2, A_3) forment un système complet d'événements. On a donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p(A_0) = p(A_0/A_1)p(A_1) + p(A_0/A_2)p(A_2) + p(A_0/A_3)p(A_3)$$

$p(A_0/A_1) = 0$ puisque $A_0 \cap A_1 = \emptyset$.
$p(A_0/A_2) = p(A_0)$ puisque les tirages sont indépendants.
$p(A_0/A_3) = 1$ puisque le jeu s'arrête.
On a donc

$$p(A_0) = \frac{n-1}{n+k}p(A_0) + \frac{k}{n+k}$$

d'où $\left(1 - \dfrac{n-1}{n+k}\right)p(A_0) = \dfrac{k}{n+k}$ et donc $p(A_0) = \dfrac{k}{k+1}$.

3. Soit $i \geq 1$ le nombre de fois où l'on a tiré la boule 1 au cours du jeu. En utilisant la formule des probabilités totales,

$$p(X=i) = p(X=i/A_1)p(A_1) + p(X=i/A_2)p(A_2) + p(X=i/A_3)p(A_3)$$

Or $p(X=i/A_1) = p(X=i-1)$ (après le premier tirage, comme on a tiré une fois la boule 1, il faut la tirer $i-1$ fois. A partir du deuxième tirage, on se retrouve en termes de probabilités au point de départ car les tirages sont indépendants.)

$$p(X=i/A_2) = p(X=i)$$

$p(X=i/A_3) = 0$ (on s'arrête).
D'où $p(X=i) = \dfrac{1}{n+k}p(X=i-1) + \dfrac{n-1}{n+k}p(X=i)$ ce qui donne :

$$p(X=i) = \frac{1}{k+1}p(X=i-1).$$

On reconnait une suite géométrique, on a donc $p(X=i) = \left(\dfrac{k}{k+1}\right)\left(\dfrac{1}{k+1}\right)^i = \dfrac{k}{(k+1)^i}$. On a $(p(A_0) = p(X=0))$

E(X) existe car $\sum i\left(\dfrac{1}{k+1}\right)^i$ est une série convergente (série géométrique de raison $\dfrac{1}{k+1}$)

D'où $E(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} ip(X=i) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)i\left(\frac{1}{k+1}\right)^i = \frac{k}{(k+1)^2}\sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{1}{k+1}\right)^i = \frac{k}{(k+1)^2}\frac{1}{(1-\frac{1}{k+1})^2} = \frac{1}{k}$.

4. Déterminons la loi de Y.
$Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
$p(Y=0) = p((X=1) \cup (X=0)) = p(X=1) + p(X=0)$.
Si $m \geq 1$, $p(Y=m) = p(X=m+1)$.

On a donc $E(Y) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} mp(Y=m)$ (sous réserve de convergence). Cette série est bien convergente car

$$mp(Y=m) = mp(X=m+1) \sim \infty (m+1)p(X=m+1)$$

(terme général d'une série convergente)
(on utilise le critère des équivalents pour les séries à termes positifs), donc :

$$E(Y)=\sum_{m=0}^{\infty} mp(Y=m)=\sum_{m=1}^{\infty} mp(X=m+1)=\sum_{m=2}^{\infty}(m-1)p(X=m)$$

On a donc comme $\sum mp(X=m)$ et $\sum p(X=m)$ sont des séries convergentes :

$$E(Y)=\sum_{m=1}^{\infty} mp(X=m)-\sum_{m=1}^{\infty} p(X=m)=E(X)-1+p(X=0)=\frac{1}{k}-1+\frac{k}{k+1}$$

$$E(Y)=\frac{1}{k(k+1)}.$$

5. Notons Y_i la variable aléatoire égale au nombre de répétitions de la boule i, pour $i=1,2,...,n$. Toutes les variables Y_i suivent la même loi que Y, car on a raisonnement analogue au cas de la boule 1.
On a $t=\sum_{i=1}^{n} Y_i$, donc $E(t)=\sum_{i=1}^{n} E(Y_i)$, d'où

$$E(t)=nE(Y).$$

6. On a donc $E(t)=\dfrac{n}{k(k+1)}$ et $E(t)-r=\dfrac{n}{k(k+1)}-r$.
Posons pour $x\in]0,+\infty[$, $f(x)=\dfrac{n}{x(x+1)}-r$.
$f(x)\leq 0\Leftrightarrow n-x(x+1)r\leq 0\Leftrightarrow -rx^2-rx+n\leq 0$
Or

$$-rx^2-rx+n=-r\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{n}{r}}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{n}{r}}\right).$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $-rx^2-rx+n\leq 0\Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{r}}$ on a donc $k_0=\left\lceil -\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{n}{r}+\dfrac{1}{4}}\right\rceil$ (k_0 est le plus petit entier supérieur à $-\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{n}{r}}$.

•••••••••