Devoir libre $n°11$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

1. (a) Si X est une variable aléatoire réelle, on note f_X la fonction densité de X. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $f_{X_n}(t) = \frac{1}{x}e^{\frac{-t}{x}}\chi_{]0,+\infty[}(t)$. La densité de S_2 est donnée par le produit de convolution :

$$f_{S_2}(t) = f_{X_1+X_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(u)f_{X_2}(t-u)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} f_{X_1}(u)f_{X_2}(t-u)\,\mathrm{d}u$$

qui est nulle si $t \leq 0$.
Si $t > 0$, on obtient :

$$f_{S_2}(t) = f_{X_1+X_2}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(u)f_{X_2}(t-u)\mathrm{d}u = \int_0^{t} f_{X_1}(u)f_{X_2}(t-u)\mathrm{d}u = \int_0^t \frac{1}{x^2}e^{\frac{-u}{x}}e^{\frac{-(t-u)}{x}}\,\mathrm{d}u = \frac{te^{\frac{-t}{x}}}{x^2}.$$

La densité de S_2 est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{S_2}(t) = \frac{1}{x^2}te^{\frac{-t}{x}}\chi_{]0,+\infty[}(t).$$

Supposons maintenant que

$$f_{S_{n-1}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \dfrac{t^{n-2}e^{\frac{-t}{x}}}{x^{n-1}(n-2)!} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Alors, pour $t > 0$

$$f_{S_n}(t) = f_{S_{n-1}+X_n}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_{n-1}}(u)f_{X_n}(t-u)\mathrm{d}u = \int_0^t f_{X_{n-1}}(u)f_{X_n}(t-u)\mathrm{d}u = \frac{t^{n-1}e^{\frac{-t}{x}}}{x^n(n-1)!}$$

D'où,

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad f_{S_n}(t) = \frac{t^{n-1}e^{\frac{-t}{x}}}{x^n(n-1)!}\chi_{]0,+\infty[}(t).$$

(b) Notons F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$ et F_{S_n} celle de S_n. On a donc

$$\forall u \in \mathbb{R},\ F_n(u) = p\left(\frac{S_n}{n} \leq u\right) = p(S_n \leq nu) = F_{S_n}(nu),$$

d'où : $\varphi_n(t) = F_n'(t) = nF_{S_n}'(nt) = 0$ si $t \leq 0$. Si $t > 0$, alors

$$\varphi_n(t) = n\varphi_n(nt) = \frac{n^n t^{n-1}e^{\frac{-nt}{x}}}{x^n(n-1)!} = \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^n t^{n-1}e^{-\left(\frac{n}{x}\right)t}}{\Gamma(n)},$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler. Donc la variable aléatoire $\frac{S_n}{n}$ suit la loi Gamma $\gamma\left(n, \frac{n}{x}\right)$.

2. (a) On remarque que $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = x$, donc, d'après la loi fiable des grands nombres appliquée à la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\forall a > 0,\ \lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > a\right) = 0$.

(b) f étant continue en x, donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall y \in [0, +\infty[$, $|x-y| < a$ implique $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. En particulier, $\forall w \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{S_n(w)}{n} - x\right| \leq a \Rightarrow \left|f\left(\frac{S_n(w)}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon.$$

La contraposition de cette implication s'écrit :

$$\forall w \in \Omega,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|f\left(\frac{S_n(w)}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{S_n(w)}{n} - x\right| > a.$$

(c) L'inégalité de la question précédente, s'écrit aussi en termes d'ensembles :

$$\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right) \subset \left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > a\right).$$

D'où

$$p\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right) \leq p\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > a\right).$$

Comme $a > 0$, il résulte du (a) que le membre droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

3. (a) Soit $w \in \Omega$. Si $w \in A_n$, alors $\chi_{A_n}(w) = 1$ et donc $\left|f\left(\frac{S_n(w)}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$. Si $w \notin A_n$, alors

$$\left|f\left(\frac{S_n(w)}{n}\right) - f(x)\right| \leq 2M.$$

Donc l'inégalité demandée est bien vérifiée.

(b) Il faut d'abord démontrer que, pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ possède une espérance mathématique. En effet, f étant bornée, il en est de même de la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$. La densité φ_n de $\frac{S_n}{n}$ est nulle sur $]-\infty, 0[$. L'inégalité, $\forall x > 0$, $|f(x)\varphi_n(x)| \leq M|\varphi_n(x)|$, montre que la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$ possède une espérance, la variable constamment égale à $f(x)$ possède également une espérance. Par linéarité la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)$ admet aussi une espérance et bien entendu :

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right) = E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x).$$

On rappelle alors que, lorsqu'une variable aléatoire X possède une espérance, la valeur absolue en possède une aussi et l'on a l'inégalité : $|E(X)| \leq E(|X|)$. D'où

$$\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| = \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| \leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right).$$

L'inégalité de la question 3.(a) permet alors d'écrire :

$$E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) \leq E\left(\varepsilon\chi_{A_n} + 2M(1 - \chi_{A_n})\right) \leq \varepsilon p(A_n) + 2M(1 - p(A_n) \leq \varepsilon + 2Mp(\overline{A_n}).$$

D'après 2.(c), $\lim_{n\to\infty} p(\overline{A_n}) = \lim_{n\to\infty} p\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| > \varepsilon\right) = 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $2Mp(\overline{A_n}) \leq \varepsilon$. D'où $\forall n \geq n_0$, $\left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = f(x).$$

4. (a) On sait, d'après le théorème de transfert, que

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \int_0^{+\infty} f(t)\varphi_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\frac{n^n t^{n-1} e^{\frac{-nt}{x}}}{x^n(n-1)!}\mathrm{d}t$$

ce qui s'écrit également :

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \frac{n^n}{x^n(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{\frac{-nt}{x}}\mathrm{d}t$$

Ainsi, d'après 3.(b),

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{x^n(n-1)!}\int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) e^{\frac{-nt}{x}}\mathrm{d}t$$

Comme f est un élément de E, alors la fonction $L(f)$ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $L(f)^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} f(t) t^k e^{-xt}\mathrm{d}t$. D'où :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n(-1)^{n-1}}{x^n(n-1)!} L(f)^{n-1}\left(\frac{-n}{x}\right).$$

(b) Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$, telle que $L(f) = 0$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x > 0$, $L(f)^{(k)}(x) = 0$, donc la formule d'inversion montre que $f(x) = 0$ pour tout $x > 0$. De plus, comme f est continue à droite en 0, alors $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Donc f est nulle sur $[0, +\infty[$.

(c) Soit f une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$, telle que $L(f)(x) = 0$ pour tout $x \in]a, +\infty[$ ($a > 0$). Considérons l'application définie sur $[0, +\infty[$ par $\varepsilon_a : t \mapsto e^{-at}$. On peut vérifier facilement que la fonction $\varepsilon_a f \in E$ puisque $|\varepsilon_a f| \leq |f|$ et que $\forall x > 0$,

$$L(\varepsilon_a f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} e^{-at} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-(x+a)t} f(t)\mathrm{d}t = L(f)(x+a).$$

Mais pour $x > 0$, $x + a \in]a, +\infty[$ et donc $L(f)(x+a) = 0$, donc $L(\varepsilon_a f)(x) = 0$ pour tout $x > 0$. Comme $\varepsilon_a f$ est bornée, alors $\varepsilon_a f = 0$ sur $[0, +\infty[$. La fonction ε_a ne s'annule jamais, il en résulte que f est nulle sur $[0, +\infty[$.

• • • • • • • • • • • •