Devoir libre $n°01$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • • • • • • • •

Exercice 1

1. Soit $a + b\alpha + c\alpha^2$ une combinaison linéaire de $1, \alpha$ et α^2 avec a, b, c des nombres rationnels. Puisque $\alpha^3 = 2$ on en déduit $a\alpha + b\alpha^2 + 2c$. Ces deux relations linéaires permettent de calculer α :

- Si $b^2 = ac$ alors $a^2 = 2bc$ et donc $b^3 = 2c^3$ ce qui est impossible.
- Donc $b^2 \neq ac$ et par suite $\alpha = \dfrac{2c^2 - ab}{b^2 - ac} \in \mathbb{Q}$ ce qui est aussi absurde.

Les trois nombres $1, \alpha, \alpha^2$ engendrent donc un sous-espace L de dimension 3.

2. L'addition dans L a les propriétés de groupe. Vérifions qu'il y a stabilité dans $\mathbb{R}$ pour la multiplication, en effet, si
$$x = a + b\alpha + c\alpha^2, \;\; y = a' + b'\alpha + c'\alpha^2,$$
alors
$$(1) \;\; xy = (aa' + 2bc' + 2b'c) + (ab' + a'b + 2cc')\alpha + (ac' + a'c + bb')\alpha^2.$$
Donc xy est bien un élément de L.
Le produit étant une fonction bilinéaire de x et y, il y a distributivité, L est donc un anneau.
Comme $\mathbb{R}$ est intègre et L un sous-anneau de $\mathbb{R}$, alors L est un anneau intègre.

3. L'application $y \mapsto xy$ (x fixé) est un endomorphisme de L considéré comme espace vectoriel. Elle est de plus injective :
$$xy = 0 \Rightarrow y = 0,$$
car L est intègre.
En dimension finie tout endomorphisme injectif est aussi bijectif. Il en résulte que $xy = 1$ admet une solution unique, d'où L est un corps.
On peut calculer l'inverse y de x en utilisant la relation (1). On est conduit à résoudre le système linéaire en a', b', c' :
$$\begin{cases} aa' + 2bc' + 2cb' = 1 \\ ab' + \;\; ba' + 2cc' = 0 \\ ac' + \;\; bb' + \;\; ca' = 0 \end{cases}$$
On obtient les valeurs :
$$a' = \frac{a^2 - 2bc}{d}, \; b' = \frac{2c^2 - ab}{d}, \; c' = \frac{b^2 - ac}{d}$$
où $d = a^2 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc$.

Exercice 2

1. C'est clair.

2. On a : $A_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $A_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{(n+1-k)!} X^{n+1-k}$ on a $A'_{n+1} = A_n$.

Pour tout $n \geq 2$, on a $A_n(0) = a_n$, et comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} = 0$, alors $A_n(1) = a_n$, d'où $A_n(0) = A_n(1)$.

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $(i), (ii)$ et (iii). Par (i) on a : $B_0 = 1 = A_0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $A_n = B_n$, par (ii) on a : $A'_{n+1} = A_n$ et $B'_{n+1} = B_n$ d'où $A'_{n+1} = B'_{n+1}$, donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $A_{n+1} = B_{n+1} + c$ et comme $B'_{n+2} = B_{n+1}$ et $A'_{n+2} = A_{n+1}$, alors :
$A'_{n+2} = B'_{n+1} + c$, donc il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A_{n+2} = B_{n+1} + cX + d.$$

Or $A_{n+2}(0) = A_{n+2}(1)$ et $B_{n+2}(0) = B_{n+2}(1)$, on en déduit que $c = 0$ donc $A_{n+1} = B_{n+1}$.

3. (a) Posons $B_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$.
La suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les propriétés $(i), (ii)$ et (iii), par 1) on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; A_n(X) = (-1)^n A_n(1-X).$$

(b) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété :

$$p(n) : \;\; A_n(X+1) - A_n(X) = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On a $A_1(X) = X - \dfrac{1}{2}$ donc $A_1(X+1) - A_1(X) = 1$ et $p(1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $p(n)$ est vraie. On a

$$A_n(X+1) - A_n(X) = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!},$$

d'où

$$A'_{n+1}(X+1) - A'_{n+1}(X) = \left(\frac{X^n}{n!}\right)'.$$

Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $A_{n+1}(X+1) - A_{n+1}(X) = \dfrac{X^n}{n!} + c$, et on a $0 = A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0) = c$.
D'où le résultat.

(c) Soit $n \geq 3$ et impair, par 2) a)

$$\begin{array}{rcl} A_n(0) & = & (-1)^n A_n(1) \\ & = & -A_n(1)) \\ & = & A_n(1) \end{array}$$

D'où $A_n(1) = A_n(0) = 0$, et on a :

$$A_n\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^n A_n\left(\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow A_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

On en déduit que $0, \;\; 1, \; \dfrac{1}{2}$ sont des racines de A_n, donc $X(X-1)(2X-1)$ divise A_n, et comme $a_n = A_n(0)$ alors $a_n = 0$.

(d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} S_n(m) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^n \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} n!(A_{n+1}(k+1) - A_{n+1}(k)) \\ & = & n!(A_{n+1}(m) - A_{n+1}(0)) \\ & = & n!(A_{n+1}(m) - a_{n+1}). \end{array}$$

(e)

$$\begin{aligned} S_2(m) &= 2(A_3(m+1)-a_3) \\ &= 2\left(\frac{(m+1)^3}{6}-\frac{(m+1)^2}{6}+\frac{m+1}{12}\right) \\ &= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1). \end{aligned}$$

4. On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg A_n = n$, donc $(A_k)_{0\le k\le n}$ est suite de polynômes de degrés échelonnés donc est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. (a) On a pour tout $k \in \{0,1,...,n\}$, $D^{n+1}(X^k)=0$ et $D^n(X^n)\neq 0$, donc $D^{n+1}=0$ et $D^n \neq 0$.
D'autre part $\triangle(A_k(X)) = \dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ donc la matrice de $\triangle$ dans la base $(A_k)_{0\le k\le n}$ est triangulaire dont les éléments diagonaux sont nuls, donc $\triangle^{n+1}=0$.
La formule de Taylor pour les polynômes s'écrit :

$$P(X+1) = P(X) + \sum_{k=1}^{n,} \frac{D^k(P)(X)}{k!} \text{ pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X].$$

c'est-à-dire

$$\triangle(P) = \sum_{k=1}^{n,} \frac{D^k(P)}{k!}.$$

(b) Soit $P \in \ker(\triangle)$, alors $P(X+1)=P(X)$ donc P est un polynôme constant. D'où $\ker(\triangle) = \mathbb{R}_0[X]$, ceci entraîne que $\mathrm{rg}(\triangle) = n-1$ et on a aussi si $\deg P = n$, alors $\deg \triangle(P) = n-1$, donc $\mathrm{Im}(\triangle) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et par conséquant $\mathrm{Im}(\triangle) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(c) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On pose $F = \{Q \in \mathbb{R}_n[X]. : Q(0) = P(0)\}$ et :

$$\triangle : F \longrightarrow \mathrm{Im}(\triangle).$$

Cette application est linéaire bijective, d'où le résultat. D'après ce qui précède u est bien définie et sa linéairité résulte de celle de D.
Montrons que u est inversible.

$$u(P) = 0 \Longleftrightarrow D(P) = 0 \Longleftrightarrow P = \text{cte} = 0$$

On pose $Q_l(X) = A_l(X) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k[A_l^{(k)}(X) - A_l^{(k)}(0)]$.

$$\begin{aligned} Q_l(X+1)-Q_l(X) &= A_l(X+1)-A_l(X)+\sum_{k=1}^{n} a_k[A_l^{(k)}(X+1)-A_l^{(k)}(X)] \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k[A_l^{(k)}(X+1)-A_l^{(k)}(X)] \\ &= \sum_{k=0}^{l} a_k \frac{X^{l-k-1}}{(l-k-1)!} \\ &= A_{l-1} \\ &= A_l^{'} \end{aligned}$$

donc pour tout $l \in \{0,1,...n\}$, $\triangle(Q_l) = D(A_l)$, c'est-é-dire $Q_l = u(A_l)$, et par linéarité on a : $\forall P \in E$, $u(P) = P(X) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k[P^{(k)}(X) - P^{(k)}(0)]$.

• • • • • • • • • • •