Devoir libre $n°02$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

$$\mathscr{E} = \left\{ A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \sum_{q=1}^{n} a_{iq} = \sum_{p=1}^{n} a_{pj},\ \ \forall i,j \in [\![1,n]\!] \right\}$$

Les matrices de $\mathscr{E}$ sont dites *semi-magiques*.

1. ⋄ $\mathscr{E}$ est non vide puisque la matrice nulle est un élément de $\mathscr{E}$.
⋄ Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux éléments de $\mathscr{E}$ et α un nombre réel. On a :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{q=1}^{n}(a_{iq}+\alpha b_{iq}) = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} + \alpha\sum_{q=1}^{n} b_{iq} = \sum_{p=1}^{n} a_{pj} + \alpha\sum_{p=1}^{n} b_{pj} = \sum_{p=1}^{n}(a_{pj}+\alpha b_{pj})\,.$$

Donc $A+\alpha B \in \mathscr{E}$. Ainsi $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
⋄ La dernière égalité montre aussi que $d(A+\alpha B) = d(A)+\alpha d(B)$, donc d est une bien une forme linéaire sur $\mathscr{E}$.

2. L'égalité matricielle $AJ = JA = \lambda J$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore à $\displaystyle\sum_{q=1}^{n} a_{iq} = \sum_{p=1}^{n} a_{pj}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Ainsi $A \in \mathscr{E}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ = JA = \lambda J$.

3. (a) Il suffit de vérifier que $\mathscr{E}$ contient la matrice unité I_n, ce qui est évident, et qu'il est stable par multiplication. En effet, si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ sont dans $\mathscr{E}$, on pose $C = AB = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. On a, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\begin{aligned} \sum_{q=1}^{n} c_{iq} &= \sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kq} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{q=1}^{n} b_{kq} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}d(B) = d(B)d(A) \end{aligned}$$

De même, on trouve $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} c_{pj} = d(A)d(B)$. Donc $\displaystyle\sum_{q=1}^{n} c_{iq} = \sum_{p=1}^{n} c_{pj}$, ainsi $AB \in \mathscr{E}$. De même on peut conclure que $d(AB) = d(A)d(B)$, de plus $d(I_n) = 1$ et $d(A+\alpha B) = d(A)+\alpha d(B)$ (la première question), ce qui montre que d est un morphisme d'anneaux.

(b) $\diamond$ Si $A \in GL_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{E}$, alors $AJ = JA = d(A)J$. Si $d(A) = 0$, alors $AJ = 0$ et comme A est inversible on obtient $A^{-1}AJ = J = 0$ ce qui est absurde, donc nécessairement $d(A) \neq 0$.

$\diamond$ L'égalité $AJ = JA = d(A)J$ s'écrit, en multipliant à gauche et à droite par A^{-1}, $A^{-1}J = JA^{-1} = \dfrac{1}{d(A)}J$ ce qui montre que $A^{-1} \in \mathscr{E}$ et que $d(A^{-1}) = \dfrac{1}{d(A)}$.

$\diamond$ On a $d(J) = n \neq 0$, cependant J n'est pas inversible. ($\mathrm{rg}(J) = 1 < n$)

4 On vérifie facilement que $BC = CB = 0$. Puisque $BC = CB$, on peut appliquer la formule de binôme :

$$A^p = (B+C)^p = A^p + \sum_{k=1}^{p-1} \complement_p^k B^k C^{p-k} + B^p = A^p + B^p.$$

5 $\mathscr{F}$ est le noyau d'un forme linéaire non nulle sur $\mathscr{E}$ ($d(J) \neq 0$), donc $\mathscr{F}$ est un hyperplan de $\mathscr{E}$. $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}(J)$ est une droite vectorielle. Comme $J \notin \mathscr{F}$, alors $\mathscr{F}$ et $\mathscr{S}$ sont deux espaces supplémentaires :

$$\mathscr{E} = \mathscr{F} \oplus \mathscr{S}.$$

(voir cours sur les formes linéaires et les hyperplans)

6 (a) $\diamond$ On a $d(T_{r,s}) = 0$ pour tout $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$, donc $T_{r,s} \in \mathscr{F}$.

$\diamond$ Soit $\displaystyle\sum_{2 \leq r,s \leq n} \alpha_{rs} T_{r,s} = 0$ une combinaison linéaire nulle des éléments $T_{r,s}$, donc matriciellement

$$\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{2 \leq r,s \leq 2} \alpha_{rs} & -\alpha_{12} & \ldots & -\alpha_{1n} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = 0.$$

Donc $\alpha_{rs} = 0$ pour tout $(r,s) \in [\![2,n]\!]^2$. Donc la famille $(T_{r,s})_{2 \leq r,s \leq n}$ est libre. Pour montrer que cette famille est une base de $\mathscr{F}$, il suffit donc de montrer qu'elle est génératrice. En effet, si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est un élément de $\mathscr{F}$, alors

$$\sum_{q=1}^{n} a_{iq} = \sum_{p=1}^{n} a_{pj} = 0,$$

alors $\forall r \in [\![2,n]\!]$, $a_{r1} = -\displaystyle\sum_{s=2}^{n} a_{rs}$ et $\forall s \in [\![2,n]\!]$, $a_{1s} = -\displaystyle\sum_{r=2}^{n} a_{rs}$, donc A s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} a_{rs} & -\displaystyle\sum_{s=2}^{n} a_{r2} & \ldots & -\displaystyle\sum_{s=2}^{n} a_{rn} \\ -\displaystyle\sum_{s=2}^{n} a_{2s} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\displaystyle\sum_{s=2}^{n} a_{ns} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=2}^{n} a_{rs}(E_{11} - E_{1s} - E_{r1} + E_{rs}) = \sum_{2 \leq r,s \leq s} a_{rs} T_{r,s} \end{aligned}$$

où $(E_{rs})_{1 \leq r,s \leq n}$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) La question précédente montre que $\dim \mathscr{F} = (n-1)^2$. De plus $\mathscr{E} = \mathscr{F} \oplus \mathscr{S}$, donc $\dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{F} + \dim \mathscr{S} = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$.

•••••••••••