Devoir libre $n°03$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

Exercice I

1. $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Alors si N est une norme, on sait que $N(e_k) = a_k > 0$, et donc il est nécessaire que tous les a_k soient strictement positifs. Cette condition est également suffisante. En effet, N est alors bien à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, il est clair que l'on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ et que, si

$$N(x) = 0 \Leftrightarrow a_1|x_1| + \ldots + a_n|x_n| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

puisqu'on somme à gauche des éléments qui sont tous positifs. Leur somme étant nulle, chacun des éléments doit être nul.
Enfin, si $x, y \in \mathbb{C}^n$, alors

$$\begin{aligned} N(x+y) &= a_1|x_1+y_1| + ... + a_n|x_n+y_n| \\ &\leq a_1(|x_1|+|y_1|) + ... + a_n(|x_n|+|y_n|) \\ &\leq a_1|x_1| + ... + a_n|x_n| + a_1|y_1| + ... + a_n|y_n| \leq N(x) + N(y) \end{aligned}$$

En conclusion, N est une norme si et seulement si les réels a_i, $i = 1, 2, ..., n$ sont strictement positifs.

2. Remarquons d'abord qu'une fonction continue sur $[0, 1]$ est bornée et atteint ses bornes. Ceci justifie que $N(f)$ est bien défini pour tout $f \in E$. De plus, on a toujours $N(f) \geq 0$.
• D'autre part, si $N(f) = 0$, alors pour tout t dans $[0, 1]$, on a $tf(x) = 0$, et donc $f = 0$ sur $]0, 1]$. Or f est continue sur $[0, 1]$ en particulier en 0, donc $f(0) = \lim_{t \to 0} f(t) = 0$. Ainsi f est nulle sur $[0, 1]$.
• Concernant l'homogénéité, prenons $\lambda \in \mathbb{R}$ et f dans E. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$|\lambda t f(t)| = |\lambda||tf(t)|,$$

et passant au max, on a bien l'égalité voulue.
• Étudions l'inégalité triangulaire : soient f et g deux éléments de E. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$|tf(t) + tg(t)| \leq |tf(t)| + |tg(t)| \leq N(f) + N(g).$$

Passant au max, on obtient :

$$N(f+g) \leq N(f) + N(g).$$

3. Si $\|.\|_A$ est une norme, alors $\|P\|_A < +\infty$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. C'est en particulier vrai pour le polynôme $P(X) = X$ et donc il est nécessaire que A soit bornée. Si A est fini et $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ soit fini. Alors le polynôme $P(X) = (X - a_1)...(X - a_n)$. Alors on a $\|P\|_A = 0$ et pourtant $P \neq 0$.
Réciproquement, montrons que si A est une partie infinie bornée, alors $\|.\|_A$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$. D'une part, cette quantité est bien finie et positive pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. D'autre part, vérifions les trois propriétés d'une norme :
• On a toujours, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $\sup_{t \in A} |\lambda P(t)| = |\lambda| \times \sup_{t \in A} |P(t)|$ et donc $\|\lambda P\|_A = |\lambda| \times \|P\|_A$.
• Si $\|P\|_A = 0$, alors P admet une infinité de racines, et donc P est le polynôme nul.
• Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors, pour tout $t \in A$,

$$|P(t) + Q(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq \|P\|_A + \|Q\|_A.$$

En passant au sup, on obtient que $\|P + Q\|_A \leq \|P\|_A + \|Q\|_A$. En conclusion, $\|.\|_A$ définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si A est une partie infinie bornée.

4. Tout d'abord la fonction $x_1f_1 + x_2f_2 + ... + x_nf_n$ est continue sur $[0, 1]$, donc la borne supérieure est finie. Supposons que $N(x_1, x_2, ..., x_n)$ soit nul. On a, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$x_1f_1(t) + x_2f_2(t) + ... + x_nf_n(t) = 0.$$

Donc si N est une norme sur $\mathbb{R}^n$, nécessairement la famille de fonctions $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ est libre (dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$). Avec cette condition,

$$N(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$$

Les autres propriétés de la norme résultent de celles de la borne supérieure.

5. On rappelle qu'une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ à coefficients réels est orthogonale si, et seulement si, ces colonnes (ou ses lignes) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Ainsi si $A \in \mathscr{O}(n)$, nécessairement $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwartz, dans $\mathbb{R}^{n^2}$, s'écrit :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| \leq \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq n\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = n\sqrt{n}.$$

D'où $\|A\|_1 \leq n\sqrt{n}$.

Exercice II

1. Remarquons que, pour chaque $t \in [0, 1]$, on a :

$$|f(t)| \leq \|f\|_\infty.$$

On intègre cette inégalité entre 0 et 1, et on trouve :

$$\|f\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \mathrm{d}t = \|f\|_\infty.$$

De même,

$$\|f\|_2^2 \leq \int_0^1 \|f\|_\infty^2 \mathrm{d}t = \|f\|_\infty^2.$$

et donc $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$.
Pour la dernière inégalité, utilisons l'inégalité de de Cauchy-Schwartz pour les intégrales :

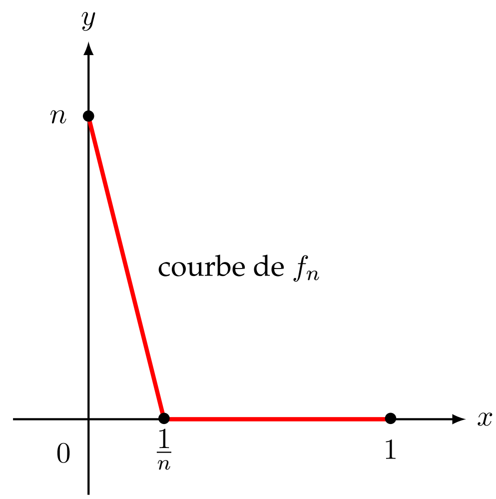
$$\int_0^1 |f(t)g(t)|\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^1 f(t)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 g(t)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi,

$$\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \leq \left(\int_0^1 1^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2.$$



2. Il est clair que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,1]$, de plus $N_\infty(f_n) = n$ et $N_1(f_n) = \dfrac{1}{2}$. Calculons $N_2(f_n)$, on a :

$$N_2(f_n)^2 = \int_0^1 |f_n(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n}} (n - n^2 t)^2 \mathrm{d}t = \frac{n}{3}.$$

D'où $N_2(f_n) = \sqrt{\dfrac{n}{3}}$.

3. On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{N_1(f_n)}{N_\infty(f_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_2(f_n)}{N_\infty(f_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)} = 0$, donc on peut trouver des constantes β, β', β'' strictement positives telles que :

$$\beta N_\infty(f) \leq N_1(f),\ \beta' N_\infty(f) \leq N_2(f) \text{ ou } \beta'' N_2(f) \leq N_1(f)$$

pour tout $f \in \mathscr{C}^0[0,1], \mathbb{R})$.

Exercice 3

1. Le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} f(k) L_k$ vérifie bien la condition demandée; c'est le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $(k, f(k), 0 \leq k \leq m$.

2. La seule difficulté est de vérifier que $N(Q) = 0 \Rightarrow Q = 0$. Mais si $N(Q) = 0$, on a $|Q(k)| = 0$ pour tout $k \in [\![0, m]\!]$. Donc Q admet $m+1$ racines distinctes. Comme Q est un polynôme de degré inférieure ou égal à m alors Q est identiquement nul.
Les autres propriétés sont évidentes.

3. Pour $k \in [\![0, m]\!]$ on a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |P_n(k) - P(k)| = \lim_{n\to\infty} |P_n(k) - f(k)| = 0$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_k tel que pour tout $n \geq n_k$, on a $|P_n(k) - P(k)| \leq \varepsilon$. Ainsi, pour $n \geq n_0 = \displaystyle\max_{k\in[\![0,m]\!]} n_k$, on a $|P_n(k) - P(k)| \leq \varepsilon$. En particulier, $N(P_n - P) = \displaystyle\max_{k\in[\![0,m]\!]} |P_n(k) - P(k)| \leq \varepsilon$. Ceci montre que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers P pour la norme N.

4. $N_{\infty,[a,b]}(Q) = 0$ si et seulement si Q admet une infinité de racines sur $[a,b]$, donc Q est le polynôme nul. Les autres propriétés sont évidentes.

5. E étant de dimension finie, donc les normes N et $N_{\infty,[a,b]}$ sont équivalentes et par conséquent $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers le polynôme P. Mais, on a :

$$\forall t \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N},\ \ |P_n(t) - P(t)| \leq N_{\infty,[a,b]}\left(P_n - P\right).$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P_n(t) = P(t)$ pour tout $t \in [a,b]$ et ceci pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, donc on peut conclure que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers P sur $\mathbb{R}$. Par unicité de la limite $P = f$.

●●●●●●●●●●●