Devoir libre $n°04$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

Exercice 1

Continuité de la fonction longueur

1. (a) L'application est positive. Son homogénéité découle de celle de $\|.\|_\infty$ et de celle du module (on a $\|\lambda f\| = |\lambda|.\|f\|$). L'inégalité triangulaire découle de la même propriété pour $\|.\|_\infty$. Enfin, si $\|f\| = 0$ alors $f(0) = \|f'\|_\infty = 0$. f' est donc nulle et f est constante. Comme $f(0) = 0$, f est nulle. On a donc aussi l'axiome de séparation et $\|.\|$ est une norme sur E_1.

(b) Soit $f \in E_1$. On a

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)| = \left|f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt\right| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt \leq |f(0)| + (1-0)\|f'\|_\infty = \|f\|$$

En passant à la borne supérieure sur x, on en déduit que

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|$$

(c) Prenons les fonctions $\varphi_n\ :\ t \mapsto t^n$, elles sont dans E_1. On a $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ et $\|\varphi_n\| = n$. Le quotient $\|\varphi_n\|/\|\varphi_n\|_\infty$ n'étant pas borné, les normes $\|.\|$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E_1.

2. (a) On a immédiatement $\|f_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ quand $n \to +\infty$. (f_n) est donc uniformément convergente sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

(b) La définition donne

$$I_n = \int_0^1 \sqrt{1 + n\pi^2\cos^2(n\pi t)}\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = n\pi t$ donne alors

$$I_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{n\pi} \sqrt{1 + n\pi^2\cos^2(u)}\mathrm{d}u$$

On a alors immédiatement

$$I_n \geq \frac{1}{n\pi}\int_0^{n\pi} \sqrt{n\pi^2\cos^2(u)}\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{n\pi} |\cos(u)|\mathrm{d}u$$

$|\cos|$ étant π périodique, on a finalement

$$I_n \geq \sqrt{n}\int_0^{\pi} |\cos(u)|\ du = 2\sqrt{n}$$

Comme $\pi \leq 4$ on peut aussi écrire que

$$I_n \geq \sqrt{n}\frac{\pi}{2}$$

(c) Comme $\|f_n - \theta\|_\infty \to 0$ (θ la fonction nulle), la continuité de L au sens de la norme $\|.\|_\infty$ entraînerait $L(f_n) \to L(\theta) = 0$. Comme on a $L(f_n)$ qui est de limite infinie quand $n \to +\infty$ on peut conclure que L n'est pas continue au sens de $\|.\|_\infty$.

(d) Soient $f, g \in E_1$. On a

$$\begin{aligned}
|L(f) - L(g)| &= \left|\int_0^1 \left(\sqrt{1+(f'(t))^2} - \sqrt{1+(g'(t))^2}\right) \mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^1 \frac{|(f'(t))^2 - (g'(t))^2|}{\sqrt{1+(f'(t))^2} + \sqrt{1+(g'(t))^2}} \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 |f'(t) - g'(t)|.|f'(t) + g'(t)| \mathrm{d}t \\
&\leq \|f' - g'\|_\infty \|f' + g'\|_\infty \\
&\leq \|f - g\| \left(\|f + g\|\right)
\end{aligned}$$

Soit (f_n) une suite d'éléments de E_1 qui converge vers f au sens de $\|.\|$. On a donc $\|f_n - f\| \to 0$. Par seconde forme de l'inégalité triangulaires, on en déduit que $\|f_n\| \to \|f\|$. L'inégalité

$$|L(f_n) - L(f)| \leq (\|f\| + \|f_n\|)\|f_n - f\|$$

montre alors que $L(f_n) \to L(f)$. L est continue au sens de $\|.\|$.

Exercice 2

Exemple d'une isométrie

1. Posons $h(t) = t^2$ pour $t \in [0,1]$. On a $T(f) = f \circ h$, et comme h est continue sur $[0,1]$ et que $f \in E$, alors $T(f) \in E$.
2. T est linéaire, ceci résulte de la structure vectorielle algébrique de E. Avec $\forall (f, g, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$,

$$T(f + \lambda g) = (f + \lambda g) \circ h = f \circ h + \lambda g \circ h = T(f) + \lambda T(g).$$

3. T étant linéaire, montrons qu'elle est lipschitzienne. En effet, $\forall f \in E$, on a :

$$\|T(f)\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |T(f)(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t^2)| \overset{x=t^2}{=} \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

T est 1-lipschitzienne, d'où la continuité de T et donc $T \in \mathscr{L}_c(E)$.

4. $\|T\| = \sup_{f\neq 0} \dfrac{\|T(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = 1$. T étant linéaire et conserve la norme, donc c'est une isométrie.

• • • • • • • • • • •