

Devoir libre n°06

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • •

—I—

1. On a :

$$\begin{aligned}(f - \text{aid}_E) \circ (f - \text{bid}_E) &= f^2 - (a + b)f + a\text{bid}_E \\ &= a^2p + b^2q - (a + b)(ap + bq) + a\text{bid}_E \\ &= a^2p + b^2q - a^2p - b^2q - ab(p + q) + a\text{bid}_E \\ &= 0.\end{aligned}$$

$(X - a)(X - b)$ est un polynôme annulateur de f , scindé à racines simples, donc l'endomorphisme f est diagonalisable.

2. (a) On a $f - \text{aid}_E = ap + bq - ap - aq = (b - a)q$, donc $q = \frac{1}{b - a}(f - \text{aid}_E)$. De même, $p = \frac{1}{a - b}(f - \text{bid}_E)$.
Ainsi $p \circ q = -\frac{1}{(b - a)^2}(f - \text{bid}_E) \circ (f - \text{aid}_E) = -\frac{1}{(b - a)^2}(f - \text{aid}_E) \circ (f - \text{bid}_E) = 0$ et également $q \circ p = 0$.
D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}p^2 &= p \circ p = \frac{1}{(b - a)^2}(f - \text{bid}_E)^2 \\ &= \frac{1}{(b - a)^2}(f^2 - 2bf + b^2\text{id}_E) \\ &= \frac{1}{(b - a)^2}((a + b)f - a\text{bid}_E - 2bf + b^2\text{id}_E) \\ &= \frac{1}{(b - a)^2}((a - b)f - b(a - b)\text{id}_E) \\ &= p.\end{aligned}$$

De même, $q^2 = q$.

- (b) On sait que $(X - a)(X - b)$ est un polynôme annulateur de f , donc le polynôme minimal π_f de f divise $(X - a)(X - b)$. Donc $\pi_f \in \{X - a, X - b, (X - a)(X - b)\}$.
Si $\pi_f = X - a$, alors $f = \text{aid}_E = ap + aq$ et donc $bq = aq$ car $f = ap + bq$, donc $(b - a)q = 0$, ceci est impossible puisque $a \neq b$ et $q \neq 0$. De même, $\pi_f \neq X - b$. Ainsi, $\pi_f = (X - a)(X - b)$ et par conséquent $Sp(f) = \{a, b\}$.
(c) Soit $m \in \mathbb{N}$, Puisque ap et bq commutent, alors on peut utiliser la formule de Binôme :

$$f^m = (ap + bq)^m = \sum_{k=0}^m \mathbb{C}_m^k (ap)^k (bq)^{m-k} = (bq)^m + \sum_{k=1}^{m-1} \mathbb{C}_m^k a^k b^{m-k} p^k q^{m-k} + (ap)^m = b^m q + a^m p.$$

Supposons $ab \neq 0$. Alors $a \neq 0$ et $b \neq 0$. On a

$$f \circ \left(\frac{1}{a}p + \frac{1}{b}q\right) = (ap + bq) \circ \left(\frac{1}{a}p + \frac{1}{b}q\right) = p^2 + \frac{a}{b}p \circ q + \frac{b}{a}q \circ p + q^2 = p + q = \text{id}_E.$$

Par conséquent f est bijective et $f^{-1} = \frac{1}{a}p + \frac{1}{b}q = a^{-1}a + b^{-1}b$.

Soit $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} f^m \circ (a^{-m}p + b^{-m}q) &= (a^m p + b^m q) \circ (a^{-m}p + b^{-m}q) \\ &= p^2 + a^m b^{-m} p \circ q + b^m a^{-m} q \circ p + q^2 \\ &= p + q \\ &= \text{id}_E. \end{aligned}$$

Donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $f^m = a^m p + b^m q$ et $f^{-m} = a^{-m}p + b^{-m}q$. Par conséquent : $\forall m \in \mathbb{Z}$, $f^m = a^m p + b^m q$.

3. On sait que $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p$, donc p est un projecteur. De même q est un projecteur.

D'après ce qui précède, p est le projecteur sur $\text{Im}(p) = \text{Im}\left(\frac{1}{a-b}(f - \text{id}_E)\right) = \text{Im}(f - \text{id}_E)$ parallèlement à $\ker\left(\frac{1}{a-b}(f - \text{id}_E)\right) = \ker(f - \text{id}_E)$. De même, q est le projecteur sur $\text{Im}(f - \text{id}_E)$ parallèlement à $\ker(f - \text{id}_E)$.

Notons que

$$\text{Im}(p) = \ker(p - \text{id}_E) = \ker\left(\frac{1}{a-b}(f - \text{id}_E - \text{id}_E + \text{id}_E)\right) = \ker\left(\frac{1}{a-b}(f - \text{id}_E)\right) = \ker(f - \text{id}_E).$$

De même $\ker(q - e) = \ker(f - \text{id}_E)$.

Finalement, p (resp. q) est la projection sur $\ker(f - \text{id}_E)$ (resp. $\ker(f - \text{id}_E)$) parallèlement à $\ker(f - \text{id}_E)$ (resp. $\ker(f - \text{id}_E)$).

4. (a) $F = \text{Vect}(p, q)$, donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\alpha p + \beta q = 0$, donc $\alpha p^2 + q \circ p = \alpha^2 p = 0$, donc $\alpha = 0$, car p n'est pas nul. On a alors $\beta q = 0$ donc $\beta = 0$ car q n'est pas nul. La famille (p, q) est libre, c'est une base de F . Ainsi $\dim(F) = 2$.

Soient $g = xp + yq$ et $g' = x'p + y'q$ deux éléments de F . Alors

$$g \circ g' = (xp + yq) \circ (x'p + y'q) = xxp^2 + xy'p \circ q + x'yq \circ p + yy'q^2 = xx'p + yy'q.$$

Donc $\forall (g, g') \in F^2$, $g \circ g' \in F$, donc F est stable par la composition.

- (b) Soit $g = xp + yq \in F$. g est un endomorphisme de E . Par conséquent g est un projecteur si et seulement si $g^2 = g$ ou encore $x^2p + y^2q = xp + yq$ ce qui est équivalent à $x^2 = x$ et $y^2 = y$. Il y a donc dans F exactement quatre projecteur : $p, q, p + q$ et l'endomorphisme nul.

- (c) Soit $g = xp + yq \in F$. $g \in \mathcal{R}(f) \Leftrightarrow g^2 = f \Leftrightarrow x^2p + y^2q = ap + bq \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = a \\ y^2 = b \end{cases}$.

Soit δ_a (resp. δ_b) une racine carrée de a (resp. b). $g \in \mathcal{R}(f) \Leftrightarrow x \in \{\delta_a, -\delta_a\}$ et $y \in \{\delta_b, -\delta_b\}$.

Trois cas sont possibles :

- $a \neq 0$ et $b \neq 0$: $\mathcal{R}(f) \cap F$ contient alors quatre éléments : $-\delta_a p - \delta_b q, -\delta_a p + \delta_b q, \delta_a p - \delta_b q$ et $\delta_a p + \delta_b q$.
- $a = 0$ et $b \neq 0$: $\mathcal{R}(f) \cap F$ contient alors deux éléments : $-\delta_b q$ et $\delta_b q$.
- $a \neq 0$ et $b = 0$: $\mathcal{R}(f) \cap F$ contient alors deux éléments : $-\delta_a p$ et $\delta_a p$.

5. (a) On a $J^2 = 3J$ et une récurrence immédiate donne $\forall m \in \mathbb{N}^*, J^m = 3^{m-1}J$. On remarque que $A = I_3 + J$ et I_3 et J commutent, donc $\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$A^m = \sum_{k=0}^m \mathbb{C}_m^k I_3^{m-k} J^k = I_3 + \sum_{k=1}^m \mathbb{C}_m^k 3^{k-1} J = I_3 + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^m \mathbb{C}_m^k 3^k \right) J = I_3 + \frac{1}{3} (4^m - 1) J$$

égalité valable également pour $m = 0$. Ainsi $\forall m \in \mathbb{N}$, $A^m = I_3 + \frac{1}{3} (4^m - 1) J$.

- (b) On a $\forall m \in \mathbb{N}$, $A^m = \left(I_3 - \frac{1}{3} J \right) + 4^m J$. Posons alors $a = 1, b = 4, B = I_3 - \frac{1}{3} J = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

et $C = \frac{1}{3} J = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $A^m = a^m B + b^m C$.

- (c) Notons f, p, q les endomorphismes de $\mathbb{C}^3$ de matrices A, B et C dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$. $p \neq 0$, $q \neq 0$ et $\text{id}_E = p + q$, $f = ap + bq$, $f^2 = a^2p + b^2q$. Les racines carrées de 1 sont -1 et 1 , celles de 4 sont -2 et 2 . Par conséquent $\mathcal{R}(f) \cap F = \{-p - 2q, -p + 2q, p - 2q, p + 2q\}$. $-B - 2C, -B + 2C, B - 2C$ et $B + 2C$ sont quatre matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ayant pour carré A .

–II–

- Soit $P = \sum_{m=0}^d a_m X^m$ un élément de $\mathbb{C}[X]$. $P(f) = \sum_{m=0}^d a_m f^m = \sum_{m=0}^d a_m \sum_{k=1}^n x_k^m p_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=0}^d a_m x_k^m \right) p_k = \sum_{k=1}^n P(x_k) p_k$. Ainsi $P(f) = \sum_{k=1}^n P(x_k) p_k$.
- D'après ce qui précède, $\Pi(f) = \sum_{k=1}^n \Pi(x_k) p_k = \sum_{k=1}^n 0 p_k = 0$. Π est donc un polynôme annulateur de f . En particulier $Sp(f) \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
 - On remarque d'abord que $L_l(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ 1 & \text{si } k = l \end{cases}$. Donc $L_k(f) = \sum_{l=1}^n L_k(x_l) p_l = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}_n$.
Soit $(k, l) \in \mathbb{N}_n^2$, $P_k \circ p_l = L_k(f) \circ L_l(f) = L_k L_l(f) = \sum_{i=1}^n L_k(x_i) L_l(x_i) p_i$. Supposons $k \neq l$, alors $\forall i \in \mathbb{N}_n$, $i \neq k$ ou $i \neq l$, donc $L_k(x_i) L_l(x_i) = 0$ et par conséquent $p_k \circ p_l = 0$.
Supposons $k = l$, alors $p_k \circ p_l = p_k^2 = \sum_{i=1}^n (L_k(x_i))^2 p_i = p_k$. Par conséquent, $\forall (k, l) \in \mathbb{N}_n^2$, $p_k \circ p_l = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ p_k & \text{si } k = l \end{cases}$.
- Soit $k \in \mathbb{N}_n$,

$$(f - x_k \text{id}_E) \circ p_k = (X - x_k)(f) \circ L_k(f) = [(X - x_k)L_k](f) = \left(\frac{1}{\Pi_k(x_k)} U \right) (f) = \frac{1}{\Pi_k(x_k)} U(f) = 0.$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $(f - x_k \text{id}_E) \circ p_k = 0$ et par suite $\forall x \in E$, $(f - x_k \text{id}_E)(p_k(x)) = 0$, donc $\forall y \in \text{Im}(p_k)$, $(f - x_k \text{id}_E)(y) = 0$, ainsi $\text{Im}(p_k) \subset \ker(f - x_k \text{id}_E)$. p_k n'est pas l'endomorphisme nul, donc $\text{Im}(p_k) \neq \{0\}$, par conséquent $\ker(f - x_k \text{id}_E) \neq \{0\}$. Ceci montre que x_k est une valeur propre de f . Donc $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset Sp(f)$. Or nous avons vu que $Sp(f) \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Finalement $Sp(f) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

- On sait que p_k est un projecteur de E . Pour conclure, il suffit de montrer que $\text{Im}(p_k) = \ker(f - x_k \text{id}_E)$ et $\ker(p_k) = V_k$. On a déjà $\text{Im}(p_k) \subset \ker(f - x_k \text{id}_E)$. D'après le lemme des noyaux, on a :

$$E = \bigoplus_{l=1}^n \ker(f - x_l \text{id}_E)$$

Pour tout $x \in E$, $x = \sum_{l=1}^n p_l(x)$, donc $E = \sum_{l=1}^n \text{Im}(p_l)$. On a $\text{Im}(p_l) \subset \ker(f - x_l \text{id}_E)$ pour tout $l \in \mathbb{N}_n$, comme $\ker(f - x_1 \text{id}_E), \ker(f - x_2 \text{id}_E), \dots, \ker(f - x_n \text{id}_E)$ sont en somme directe il en est de même pour $\text{Im}(p_1), \text{Im}(p_2), \dots, \text{Im}(p_n)$. Supposons qu'il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $\text{Im}(p_i) \subsetneq \ker(f - x_i \text{id}_E)$, alors $\dim \text{Im}(p_i) < \dim \ker(f - x_i \text{id}_E)$ et donc

$$\dim E = \sum_{l=1}^n \dim \text{Im}(p_l) < \sum_{l=1}^n \dim \ker(f - x_l \text{id}_E) = \dim E$$

ce qui est absurde. Donc $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\text{Im}(p_k) = \ker(f - x_k \text{id}_E)$.

Ne reste plus qu'à montrer que $\ker p_k = V_k$. Soit $l \in \mathbb{N}_n \setminus \{k\}$, $\forall x \in \ker(f - x \text{id}_E)$, $p_l(x) = x$ car p_l est la projection sur $\ker(f - x \text{id}_E)$. Ainsi, $p_k(x) = p_k(p_l(x)) = p_l \circ p_l(x) = 0$ et donc $\ker(f - x \text{id}_E) \subset \ker p_k$ et donc $V_k \subset \ker p_k$.

Réciproquement, soit $x \in \ker p_k$,

$$x = p_1(x) + \dots + p_{k-1}(x) + 0 + p_{k+1}(0) + \dots + p_n(x).$$

Donc $x \in \sum_{l=1, l \neq k}^n \text{Im}(p_l) = \sum_{l=1, l \neq k}^n \ker(f - x \text{id}_E) = V_k$. Finalement : $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\ker p_k = V_k$.

4. (a) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \alpha_k p_k = 0$, donc $\forall l \in \mathbb{N}_n$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k p_k \circ p_l = 0 \circ p_l = 0$, donc $\alpha_l p_l^2 = \alpha_l p_l = 0$ puis $\alpha_l = 0$. Donc la famille $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ est libre. Par conséquent $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ est une famille libre et génératrice de F , donc c'est une base de F . D'où $\dim F = n$.

- (b) Soit $g = \sum_{k=1}^n \alpha_k p_k$ un élément de F , alors $g^2 = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k p_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_k \alpha_l p_k \circ p_l = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 p_k^2 = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 p_k$.

Ainsi $g \in \mathcal{R}(f)$ si et seulement si $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 p_l = \sum_{k=1}^n x_k^2 p_k$ ou encore si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $\alpha_k^2 = x_k$.

Deux cas sont possibles :

- $\forall k \in \mathbb{N}_n$, $x_k \neq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, x_k possède deux racines carrées distinctes $-\delta_k$ et δ_k . Ainsi

$g \in \mathcal{R}(f)$ si et seulement si il existe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $g = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \delta_k p_k$. Il y a autant

d'éléments dans $\mathcal{R}(f) \cap F$ que d'éléments dans $\{-1, 1\}^n$. Donc $\text{card}(\mathcal{R} \cap F) = 2^n$.

- Il existe $k_0 \in \mathbb{N}_n$, $x_{k_0} = 0$, $x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_n$ sont alors non nuls et possèdent chacun deux racines carrées distinctes. Notons $-\delta_k$ et δ_k les deux racines carrées de x_k pour $k \in \mathbb{N}_n \setminus \{k_0\}$, alors $g \in \mathcal{R}$ si et seulement si $\alpha_{k_0}^2 = x_{k_0}$ ou encore si et seulement si $\alpha_{k_0} = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}_n \setminus \{k_0\}$, $\alpha_k \in \{-\delta_k, \delta_k\}$. Il y a donc 2^{n-1} éléments dans $\mathcal{R}(f) \cap F$.

- (c) Soit $g = \sum_{k=1}^n \alpha_k p_k$ un élément de F . $g \in \mathcal{L}(E)$, par conséquent g est un projecteur si et seulement si $g^2 = g$. Or

$$g^2 = g \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 p_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k p_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_n, \alpha_k^2 = \alpha_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_n, \alpha_k = 0 \text{ ou } \alpha_k = 1.$$

Il y a donc exactement 2^n projecteur dans F .

5. (a) $\dim E = N = n$ et f à N valeurs propres distinctes $x_1, x_2, \dots, x_n$, donc les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont des droites vectorielles. Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, on note e_k un vecteur propre non nul associé à la valeur propre x_k . Donc $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de f . Soit maintenant $g \in \mathcal{L}(E)$ et $g \circ f = f \circ g$, alors les sous-espaces propres $\ker(f - x_i \text{id}_E) = \text{Vect}(e_i)$ sont stables par g , ainsi pour chaque $k \in \mathbb{N}_n$, il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $g(e_k) = \mu_k e_k$. Montrons que $g = \sum_{k=1}^n \mu_k p_k$. g et $\sum_{k=1}^n \mu_k p_k$ étant deux endomorphismes de E pour montrer qu'ils sont égaux montrer qu'ils coïncident dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $l \in \mathbb{N}_n$ et $k \in \mathbb{N}_n$. Si $l \neq k$, alors $p_k(e_l) = 0$ car $e_l \in V_k = \ker(f - x_k \text{id}_E)$. Si $l = k$, $p_k(e_l) = p_k(e_k) = e_k$. Donc $\forall l \in \mathbb{N}_n$, $\sum_{k=1}^n \mu_k p_k(e_l) = \mu_l p_l(e_l) = \mu_l e_l = g(e_l)$. Ceci montre que $g = \sum_{k=1}^n \mu_k p_k$ et donc $g \in F$.

Réciproquement, si $g \in F$ avec $g = \sum_{k=1}^n \beta_k p_k$, alors $g \circ f = \left(\sum_{k=1}^n \beta_k p_k \right) \circ \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k p_k \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k p_k = f \circ g$.

- (b) Soit $g \in \mathcal{R}(f)$, donc $g \circ f = f^2 \circ f = f^3 = f \circ f^2 = f \circ g$, ainsi g commute avec f et donc $g \in F$. Par conséquent $\mathcal{R}(f) \subset F$ et donc $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(f) \cap F$. Notons alors que $\mathcal{R}(f)$ a 2^n éléments si aucun des x_k n'est pas nul et 2^{n-1} éléments si l'un des x_k est nul.
6. Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, notons $E_{x_k}(h) = \ker(h - x_k \text{id}_E)$ le sous-espace propre de h associé à la valeur propre x_k . On a $E = \bigoplus_{k=1}^n E_{x_k}(h) = E_{x_l}(h) \oplus \bigoplus_{k=1, \neq l}^n E_{x_k}(h)$. Notons q_k la projection sur $E_{x_k}(h)$ parallèlement à

$\bigoplus_{k=1, \neq l}^n E_{x_k}(h)$. Montrons alors que

$$\forall m \in \mathbb{N}, h^m = \sum_{k=1}^n x_k^m q_k.$$

Fixons $m \in \mathbb{N}^*$ et y dans E . Il existe $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in E_{x_1}(h) \times E_{x_2}(h) \times \dots \times E_{x_n}(h)$ unique tel que $y = y_1 + y_2 + \dots + y_n$. Soit $k \in \mathbb{N}_n$, $y_k \in E_{x_k}(h) = \ker(h - x_k \text{id}_E)$, $h(y_k) = x_k y_k$, donc $h^m(y_k) = x_k^m y_k$. De plus $y = y_k + \sum_{l=1, \neq k}^n y_l$, donc $q_k(y) = y_k$. Ainsi

$$h^m(y) = \sum_{k=1}^n h^m(y_k) = \sum_{k=1}^n x_k^m y_k = \sum_{k=1}^n x_k^m q_k(y) = \left(\sum_{k=1}^n x_k^m q_k \right) (y)$$

ceci pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $y \in E$. Donc $\forall m \in \mathbb{N}, h^m = \sum_{k=1}^n x_k^m q_k$. Il ne reste plus qu'à dire que $\forall k \in \mathbb{N}_n, q_k$ est non nul. Ceci est clair car $\text{Im}(q_k) = E_{x_k}(h) = \ker(h - x_k \text{id}_E) \neq \{0\}$.

7. (a) λ est une valeur propre de A si et seulement si $\det(\lambda I_3 - A) = 0$. Cherchons alors ce déterminant.

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 1 - 1 - \lambda + \lambda - \lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

D'où $Sp(A) = \{-1, 0, 1\}$. Nous poserons $x_1 = -1, x_2 = 0$ et $x_3 = 1$.

- (b) On trouve $L_1 = \frac{1}{2}X(X - 1) = \frac{1}{2}(X^2 - X)$, $L_2 = -X^2 + 1$ et $L_3 = \frac{1}{2}(X^2 + X)$.

$A_1 = L_1(A) = \frac{1}{2}(A^2 - A)$, $A_2 = L_2(A) = -A^2 + I_3$, $A_3 = L_3(A) = \frac{1}{2}(A^2 + A)$. Notons que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Il vient alors $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (c) Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est A . $Sp(h) = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Posons $\forall i \in \mathbb{N}_3, H_i = \ker(h - x_i \text{id}_E)$ et $\hat{H}_i = \bigoplus_{k=1, \neq i}^3 H_k$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_3$, notons q_i la projection sur H_i

parallèlement à $\hat{H}_i$.

— $n = N = 3$,

— $\forall i \in \mathbb{N}_3, q_i \neq 0$,

— $\forall m \in \mathbb{N}, h^m = \sum_{k=1}^3 x_k^m q_k$,

— $\forall i \in \mathbb{N}_3, q_i = L_i(h)$, A_i est la matrice de q_i dans la base canonique,

— $\mathcal{R}(h) = \mathcal{R}(h) \cap \text{Vect}(q_1, q_2, q_3)$,

— $g \in \mathcal{R}(h) = \mathcal{R}(h) \cap F \Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), g = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3$ avec $\alpha_1^2 = -1, \alpha_2^2 = 0$ et $\alpha_3^2 = 1$.

Donc $\mathcal{R}(h) = \{iq_1 + q_3, iq_1 - q_3, -iq_1 + q_3, -iq_1 - q_3\}$ et par conséquent

$$\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) | M^2 = A\} = \{iA_1 + A_3, iA_1 - A_3, -iA_1 + A_3, -iA_1 - A_3\}.$$

-III-

1. (a) Puisque $u^{n-1} \neq 0$, alors il existe $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Montrons que $(x, u(x), \dots, n_{n-1}(x))$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \dots + \alpha_{n-1} n_{n-1}(x) = 0$. Montrons par une récurrence faible que $\forall k \in \mathbb{N}_n, \alpha_k = 0$. On a

$$u^{n-1}(\alpha_0 x + \alpha_1 u(x) + \dots + \alpha_{n-1} n_{n-1}(x)) = \alpha_0 u^{n-1}(x) = 0.$$

Donc $\alpha_0 = 0$ car $u^{n-1}(x) \neq 0$.

Supposons $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ pour $k \in \mathbb{N}_{n-2}$ et montrons que $\alpha_{k+1} = 0$. On a donc $\alpha_{k+1} u^{k+1}(x) + \alpha_{k+2} u^{k+2}(x) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x) = 0$, composons par u^{n-2-k} , donc $\alpha_{k+1} u^{n-1}(x) + \alpha_{k+2} u^{k+2}(x) + \dots + \alpha_{n-1} u^{2n-3-k}(x) = 0$, or $u^i(x) = 0$ pour $k \geq n$ donc $\alpha_{k+1} u^{n-1}(x) = 0$ et donc $\alpha_{k+1} = 0$. Ceci achève la récurrence. Par conséquent la famille $(x, u(x), \dots, n_{n-1}(x))$ est libre.

Notons que nécessairement $n \leq N$.

- (b) Par division euclidienne, il existe un couple unique (Q, R) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P = X^n Q + R$ avec $R = 0$ ou $\deg R \leq n-1$.

Supposons X^n divise P , alors $R = 0$ et donc $P(u) = (X^n Q)(u) = u^n \circ Q(u) = 0$.

Réciproquement, supposons que $P(u) = 0$. Alors $0 = u^n \circ Q(u) + R(u) = R(u)$. Si $R = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$,

alors en particulier $R(u)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x) = 0$. Comme $(x, u(x), \dots, n_{n-1}(x))$ est libre, $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots =$

$\alpha_{n-1} = 0$ et donc $R = 0$ et par conséquent X^n divise P .

- (c) Supposons $\mathcal{R}(u) \neq \emptyset$. Il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$. Donc $v^{2n} = u^n = 0$ et $v^{2n-2} = u^{n-1} \neq 0$.

• Si $v^{2n-1} \neq 0$, comme $v^{2n} = 0$, il vient $2n \leq N$.

• Si $v^{2n-1} = 0$ comme $v^{2n-2} \neq 0$, il vient $2n-1 \leq N$.

Donc dans tous les cas $n \leq \frac{N+1}{2}$.

2. (a) D'après le cours des séries entières, on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1} 1.3.5 \dots (2n-3)}{2^n (n!)} x^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

avec $a_0 = 1$ et $a_k = \frac{(-1)^{k-1} 1.3.5 \dots (2k-3)}{2^k (k!)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- (b) On a $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x_n x^n + o(x^n) = P_n(x) + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Elevons au carré :

$$1+x = P_n(x)^2 + a_n^2 x^{2n} + x^{2n} (\varepsilon(x))^2 + 2a_n x^n P_n(x) + 2x^n \varepsilon(x) P_n(x) + 2a_n x^n \varepsilon(x)$$

$$\frac{1+x - P_n(x)^2}{x^n} = a_n^2 x^n + x^n (\varepsilon(x))^2 + 2a_n P_n(x) + 2\varepsilon(x) P_n(x) + 2a_n \varepsilon(x)$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - P_n(x)^2}{x^n} = 2a_n P_n(0) = 2a_n$, par conséquent $x \mapsto \frac{P_n(x)^2 - 1 - x}{x^n}$ admet une limite finie en 0.

D'autre part, par division euclidienne, il existe des polynômes Q et R tels que $P_n^2 - X - 1 = X^n Q + R$ avec $R = 0$ ou $\deg(R) \leq n-1$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{P_n(x)^2 - x - 1}{x^n} - Q(x) = \frac{R(x)}{x^n}$, donc $x \mapsto \frac{R(x)}{x^n}$

admet une limite finie en 0. Supposons $R = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k X^k \neq 0$. Soit $i = \min\{k \in \mathbb{N}_{n-1} | \beta_k \neq 0\}$, alors

$R(x) = \sum_{k=i}^{n-1} \beta_k x^k \underset{0}{\sim} \beta_i x^i$, $\frac{R(x)}{x^n} \underset{0}{\sim} \beta_i \frac{1}{x^{n-i}}$, ce qui donne $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{R(x)}{x^n} \right| = +\infty$. Donc nécessairement $R = 0$.

Finalement X^n divise $P_n^2 - X - 1$.

3. (a) Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes tels que X^n divise $Q_1^2 - X - w^2$ et $Q_2^2 - X - w$, donc X^n divise $(Q_1^2 - X - w^2) - (Q_2^2 - X - w) = Q_1^2 - Q_2^2$. En particulier $(Q_1^2 - Q_2^2)(0) = 0$ (0 est une racine de $Q_1^2 - Q_2^2$ d'ordre au moins n). Donc $(Q_1 - Q_2)(0) = 0$ ou $(Q_1 + Q_2)(0) = 0$. Montrons que l'on ne peut avoir $(Q_1 - Q_2)(0) = (Q_1 + Q_2)(0) = 0$.

Supposons ait lieu, $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$. Or il existe un polynôme T tel que $Q_1^2 - X - w^2 = X^n T$, donc $Q_1^2(0) - 0 - w^2 = 0$ alors $w^2 = 0$ ce qui absurde. Donc ou $[(Q_1 - Q_2)(0) = 0 \text{ et } (Q_1 + Q_2)(0) \neq 0]$ ou $[(Q_1 - Q_2)(0) \neq 0 \text{ et } (Q_1 + Q_2)(0) = 0]$.

Envisageons le cas $[(Q_1 - Q_2)(0) = 0 \text{ et } (Q_1 + Q_2)(0) \neq 0]$. X^n divise $(Q_1 Q_2)(Q_1 + Q_2)$ et 0 n'est pas une racine de $Q_1 + Q_2$ donc X^n divise $Q_1 - Q_2$. Or $\deg(Q_1 - Q_2) \leq n - 1$, donc $Q_1 - Q_2 = 0$ ou encore $Q_1 = Q_2$.

Un raisonnement analogue prouve que si $[(Q_1 - Q_2)(0) \neq 0 \text{ et } (Q_1 + Q_2)(0) = 0]$, alors $Q_1 = -Q_2$.

Pour conclure, montrons que X^n divise $Q_{n,w}^2 - X - w^2$. On a X^n divise $P_n^2 - X - 1$, donc il existe

$T \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_n^2 - X - 1 = X^n T$, donc $P_n^2 \left(\frac{X}{w^2} \right) - \frac{X}{w^2} - 1 = \left(\frac{X}{w^2} \right)^n T \left(\frac{X}{w^2} \right)$, en multipliant par w^2 , on obtient :

$$w^2 P_n^2 \left(\frac{X}{w^2} \right) - X - w^2 = \frac{X^n}{w^{2n-2}} T \left(\frac{X}{w^2} \right).$$

Donc X^n divise $w^2 P_n^2 \left(\frac{X}{w^2} \right) - X - w^2 = Q_{n,w}^2 - X - w$, de plus $Q_{n,w} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ car $P_n \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Soit maintenant $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que X^n divise $Q^2 - X - w$, alors par unicité $Q = Q_{n,w}$ ou $Q = -Q_{n,w}$.

Finalement l'ensemble des polynômes Q de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tels que X^n divise $Q^2 - X - w^2$ est $\{Q_{n,w}, -Q_{n,w}\}$.

- (b) X^n divise $Q_{n,w}^2 - X - w^2$ donc $Q_{n,w}^2(u) - u - w^2 \text{id}_E = 0$. Par conséquent $(Q_{n,w}(u))^2 = u + w^2 \text{id}_E$, donc $Q_{n,w}(u) \in \mathcal{R}(u + w^2 \text{id}_E)$ ce qui montre que $\mathcal{R}(u + w^2 \text{id}_E) \neq \emptyset$. Notons également que $-Q_{n,w}(u) \in \mathcal{R}(u + w^2 \text{id}_E)$.

4. (a) Si $g \in \mathcal{R}(u + w^2 \text{id}_E)$ alors $u = g^2 - w^2 \text{id}_E$ est un polynôme en g , donc $g \circ u = u \circ g$.
(b) $g(x) \in E$ et $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E , donc il existe des scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ de $\mathbb{C}$ tels

que $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x)$. Posons $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$. Alors $P \in \mathbb{C}[X]$ et $g(x) = P(u)(x)$.

$(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ étant une base de E pour montrer que les deux endomorphismes g et $P(u)$ sont égaux il suffit de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}_{n-1}$, $g(u^k(x)) = (P(u))(u^k(x))$.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$(P(u))(u^k(x)) = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i \right) (u^k(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^{i+k}(x) = u^k \left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i u^i \right) (x) \right)$$

$$P(u)(u^k(x)) = u^k(P(u)(x)) = u^k(g(x)) = g(u^k(x)).$$

Donc $g = P(u)$.

- (c) Soit $g^2 = u + w^2 \text{id}_E$, donc $P(u)^2 - u - w^2 \text{id}_E = (P^2 - X - w^2)(u) = 0$, donc X^n divise $P^2 - X - w^2$. Comme $\deg P \leq n - 1$, donc $P = Q_{n,w}$ ou $P = -Q_{n,w}$. Donc $g = P(u) = Q_{n,w}(u)$ ou $g = P(u) = -Q_{n,w}$. Par conséquent $\mathcal{R}(u + w^2 \text{id}_E) \subset \{Q_{n,w}, -Q_{n,w}\}$. Comme dans la question 3.b de cette partie, nous avons prouver l'inclusion contraire, nous avons donc $\mathcal{R}(u + w^2 \text{id}_E) = \{Q_{n,w}, -Q_{n,w}\}$

$$5. A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, (A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (A - I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (A - I_4)^4 = 0.$$

Donc $A = I_4 + B$ avec $B^3 \neq 0$ et $B^4 = 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ de matrice A dans la base canonique et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ de matrice B dans la base canonique. $f = u + 1^2 \text{id}_E$, $u^3 \neq 0$ et $u^4 = 0$.

$$\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(u + 1^2 \text{id}_E) = \{Q_{4,1}, -Q_{4,1}\} \text{ avec } Q_{4,1} = 1P_4 \left(\frac{X}{1^2} \right) = P_4(X) = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3.$$

Par conséquent $\{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C}) | M^2 = A\} = \left\{ I_4 + \frac{1}{2}B - \frac{1}{8}B^2 + \frac{1}{16}B^3, -I_4 - \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}B^2 - \frac{1}{16}B^3 \right\} = \{T, -T\}$

avec $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Soit v_0 un élément de $\mathcal{R}(u)$, c'est-à-dire $v_0^2 = u$, donc $v_0^{2n} = u_n = 0$ et $v_0^{2n-2} = u^{n-1} \neq 0$. Deux cas sont possibles :

• Premier cas : $v_0^{2n-1} = 0$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(v_0 + \lambda u^{n-1})^2 = v_0^2 + 2\lambda v_0 \circ u^{n-1} + \lambda^2 u^{2n-2} = v_0^2 + 2\lambda v_0 \circ v_0^{2n-2} = v_0^2 = u$. Donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $v_0 + \lambda u^{n-1} \in \mathcal{R}(u)$, $\mathcal{R}(u)$ contient une infinité d'éléments car $u^{n-1} \neq 0$.

• Deuxième cas : $v_0^{2n-1} \neq 0$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(v_0 + \lambda v_0 \circ u^{n-1})^2 = v_0^2 + 2\lambda v_0^2 \circ u^{n-1} + \lambda^2 v_0^2 u^{2n-2} = v_0^2 + 2\lambda v_0 \circ v_0^{2n-2} = v_0^2 = u$. Donc $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $v_0 + \lambda v_0 \circ u^{n-1} \in \mathcal{R}(u)$, $\mathcal{R}(u)$ contient une infinité d'éléments car $v_0 \circ u^{n-1} = v_0^{2n-1} \neq 0$.

Dans les deux cas $\mathcal{R}(u)$ est infini.

7. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$AM = MA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e \\ b = 0 \\ c = 0 \\ h = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) | AM = MA\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix} \mid (a, d, f, g, i) \in \mathbb{C}^5 \right\}.$$

- (b) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Si $M^2 = A$ alors A et M commutent, par conséquent M est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix}$.

Donc

$$M^2 = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ad + fg & a^2 & af + fi \\ ga + ig & 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = i = 0, fg = 1.$$

D'où

$$\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) | M^2 = A\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & f \\ \frac{1}{f} & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (d, f) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \right\}.$$

-IV-

1. (a) L'ensemble $\{P \in \mathbb{C}[X] | P(f) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ non réduit à $\{0\}$, car il contient, par exemple, le polynôme caractéristique de f (théorème de Cayley-Hamilton). Donc il existe un polynôme unitaire unique Φ_f tel que $\{P \in \mathbb{C}[X] | P(f) = 0\} = \{\Phi_f Q | Q \in \mathbb{C}[X]\}$.
- (b) Le polynôme caractéristique χ_f est un polynôme annulateur, donc Φ_f divise χ_f , donc il existe des scalaires $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ tels que

$$\Phi_f = \prod_{k=1}^n (X - x_k)^{\beta_k}$$

avec $\forall k \in \mathbb{N}_n, 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$. Montrons que $k \in \mathbb{N}_n, \beta_k \geq 1$. Pour cela il suffit de montrer que les racines de χ_f sont des racines de Φ_f .

Soit $\lambda \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, donc λ est une valeur propre de f . Il existe donc un vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$.

Une récurrence immédiate prouve que pour tout entier strictement positif k , on a $f^k(x) = \lambda^k x$, d'où on déduit que pour tout polynôme P à coefficients dans $\mathbb{C}$, on a

$$P(f)(x) = P(\lambda)x.$$

En appliquant ce résultat avec le polynôme Φ_f , on obtient

$$0 = \Phi_f(f)(x) = \Phi_f(\lambda)x.$$

Comme le vecteur x est non nul on en déduit que $\Phi_f(\lambda) = 0$. Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}_n, \beta_k \geq 1$.

2. Les E_k sont stables par f et $f \circ g = g \circ f$, donc les E_k sont également stables par g .
3. (a) Montrons que la dimension de $E_1 = \ker f^{\alpha_1}$ est égale à la multiplicité α_1 de $x_1 = 0$. Notons f_1 l'endomorphisme induit par f sur E_1 . On peut écrire $\chi_f = X^{\alpha_1}Q$ où Q est premier avec X (ce qui est équivalent $Q(0) \neq 0$). Vu que $f_1^{\alpha_1} = 0$, on a $\chi_{f_1} = X^k$, où k est la dimension de E_1 . Par le lemme des noyaux, $E = E_1 \oplus \ker Q(f)$ où $\ker Q(f)$ est stable par f . Donc $\chi_f = \chi_{f_1}\chi_g$ où g est l'endomorphisme induit par f dans $\ker Q(f)$. Mais 0 n'est pas une valeur propre de g (tous les vecteurs propres associés à 0 appartiennent à E_1), donc $\chi_g(0) \neq 0$. Par conséquent, $\chi_{f_1} = X^{\alpha_1}$ et $k = \alpha_1$.
D'après la définition de Φ_f , $f_1^{\beta_1} = 0$ et $f_1^{\beta_1-1} \neq 0$, sinon on aura un polynôme annulateur de f de degré inférieur à celui de Φ_f . L'indice de nilpotence de f_1 est donc β_1 .
Ainsi, en utilisant le résultat de question 1.c de la partie II :

$$\left[x_1 = 0 \text{ et } \beta_1 > \frac{\alpha_1 + 1}{2} \right] \Rightarrow \mathcal{R}(f_1) = \emptyset \Rightarrow \mathcal{R}(f) = \emptyset.$$

- (b) Notons f_k l'endomorphisme induit par f sur E_k et posons $u_k = f_k - x_k \text{id}_E$. On sait que u_k , considérée comme un endomorphisme de E_k , est nilpotent. Notons δ_k l'une des racines (non nulle) de x_k . Alors $f_k = u_k + \delta_k^2 \text{id}_E$. D'après la partie III, $\mathcal{R}(u_k + \delta_k^2 \text{id}_E) \neq \emptyset$. Donc $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.
- (c) Dans cette condition f_1 est nilpotent avec $f_1^{\alpha_1} = 0$ et $\alpha_1 \geq 2$. Si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ alors en particulier $\mathcal{R}(f_1) \neq \emptyset$. Ainsi, d'après la question 6, $\mathcal{R}(f_1)$ possède une infinité d'éléments. Il est de même de $\mathcal{R}(f)$.
4. (a) $g \in \mathcal{R}(f) \Leftrightarrow g^2 = f \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_n, g_k^2 = f_k$ où g_k est l'endomorphisme induit par g sur E_k . Ainsi, d'après la question 5 de la partie II, et comme $0 \notin Sp(f)$, alors $\forall k \in \mathbb{N}_n, \text{card} \{g_k \in \mathcal{L}(E_k) | g_k^2 = f_k\} = \text{card} \mathcal{R}(u_k + x_k \text{id}_E) = 2$ et donc $\text{card} \mathcal{R}(f) = 2^n$.
- (b) Toujours d'après le résultat de la question 5, $\text{card} \mathcal{R}(f) = 2^{n-1}$ si $x_1 = 0$ et $\alpha_1 = 1$.

• • • • •