

Devoir libre n°07

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • •

PRÉLIMINAIRES

1. Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à variations bornées alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ est absolument convergente, donc convergente, or

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_{k-1} - a_k) = a_0 - a_n \text{ donc la suite } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente.}$$

2. On a $d_n = b_n - b_{n+1}$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N n d_n &= \sum_{n=1}^N n(b_n - b_{n+1}) \\ &= \sum_{n=1}^N n b_n - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1) b_n \\ &= \sum_{n=1}^N b_n + \sum_{n=1}^N (n-1) b_n - \sum_{n=1}^N (n-1) b_n - N b_{N+1} \\ &= \sum_{n=1}^N b_n - N b_{N+1}. \end{aligned}$$

PARTIE I

1. On a, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $d_n = b_n - b_{n+1}$ ce qui montre que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convexe si et seulement si la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Par convexité de la fonction f , on a :

$$f(n) = f\left(\frac{n+1}{2} + \frac{n-1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(n+1) + \frac{1}{2}f(n-1).$$

D'où $f(n+1) + f(n-1) - 2f(n) \geq 0$ ce qui montre que la suite de terme général $a_n = f(n)$ est convexe.

3. On a donc (b_n) et $(-b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissantes donc (b_n) est une suite constante, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n-1} - a_n = b_0$, d'où on en déduit, par une récurrence immédiate, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 - n b_0.$$

La réciproque est immédiate. Ainsi les suites convexes et d'opposé convexe sont les suites arithmétiques.

4. La fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est convexe si $\alpha \geq 1$ (sa dérivée seconde est positive) et strictement concave si $0 < \alpha < 1$. Donc la suite $(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est convexe si et seulement si $\alpha \geq 1$.
5. (a) Avec une calculatrice, pour $n = 9$, on trouve :

n	8	9	10
a_n	22	27	31

Donc $d_9 = -1 < 0$ et par conséquent la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convexe.

(b) On a

$$\begin{aligned} (n+1)^\alpha - 1 &< E[(n+1)\alpha] \\ (n-1)^\alpha - 1 &< E[(n-1)\alpha] \\ -2n\alpha &\leq -2E(n^\alpha) \end{aligned}$$

d'où, en additionnant ces inégalités, on trouve

$$d_n \geq (n+1)^\alpha + (n-1)^\alpha - 2n - 2.$$

Soit $f : x \mapsto (x+1)^\alpha + (x-1)^\alpha - 2x - 2$, alors $f(1) = 2^\alpha - 4 \geq 0$ (car $\alpha \geq 2$) puis $f' : x \mapsto \alpha[(x+1)^{\alpha-1} + (x-1)^{\alpha-1}] - 2$ est à valeurs positives car $g : x \mapsto x^{\alpha-1}$ est convexe. Donc f est croissante et, de la propriété $f(1) \geq 0$, on tire que $f(n)$ est positif pour $n \geq 1$. Ainsi, pour $\alpha \geq 2$, la suite $E(n^\alpha)$ est convexe.

PARTIE II

- La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-A \leq a_n \leq A$, on a : $b_n = a_{n-1} - a_n \geq -2A$. Toute suite décroissante et minorée converge dans $\mathbb{R}$, donc $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
 - Supposons $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne serait pas bornée, en effet, en supposant par exemple $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $b_n \geq \frac{b}{2} > 0$, d'où par une récurrence immédiate, $\forall n \geq n_0$, $a_n \leq a_{n_0} - \frac{n - n_0}{2}b$, ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$: contradiction. En conclusion $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, en particulier $b_n \geq 0$ puisqu'elle décroissante.
- Puisque $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, puisqu'elle est minorée, elle est donc convergente.
- On écrit $a_p - a_n = \sum_{k=p+1}^n b_k$ et comme $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors $b_k \leq b_n$ pour tout $k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, donc $a_p - a_n \geq \sum_{k=p+1}^n b_n = (n - p)b_n \geq n_s 2b_n$ (car $-p \geq -\frac{n}{2}$) donc

$$0 \leq nb_n \leq 2(a_p - a_n).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq 2nb_{2n} \leq 2(a_n - a_{2n}) \text{ et } 0 \leq (2n+1)b_{2n+1} \leq 2(a_n - a_{2n+1})$$

et ce deuxième membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On a donc montré $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_n = 0$. L'inégalité $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq nb_{n+1} \leq (n+1)b_{n+1}$ suffit alors pour conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} nb_{n+1} = 0$.

- D'après la question 2. de la partie préliminaires, on a :

$$\sum_{n=1}^N nd_n = \sum_{n=1}^N b_n - Nb_{N+1}.$$

Puisque la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la série $\sum b_n$ converge, et comme $\lim_{N \rightarrow \infty} Nb_{N+1} = 0$, la série $\sum nd_n$ converge puis, par passage à la limite, on obtient la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} nd_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

PARTIE III

- On rappelle l'égalité suivante, qu'on peut utiliser sans démonstration :

$$\sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^n a_{n,p} = \sum_{p=1}^N \sum_{n=p}^N a_{n,p}.$$

En utilisant l'inégalité de l'indication et l'inégalité triangulaire, et on fait la somme sur n , on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N |b_n| &\leq \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| + \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^{n-1} \frac{p}{N} |b_p - b_{p+1}| + \sum_{n=1}^N \sum_{p=n}^{N-1} \frac{N-p}{N} |b_p - b_{p+1}| \\
 &\leq \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| + \sum_{n=1}^N \sum_{p=0}^{n-1} \frac{p}{N} |b_p - b_{p+1}| + \sum_{n=1}^N \sum_{p=n}^N \frac{N-p}{N} |b_p - b_{p+1}| \\
 &\leq \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| + \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^n \frac{p-1}{N} |b_{p-1} - b_p| + \sum_{n=1}^N \sum_{p=n}^N \frac{N-p}{N} |b_p - b_{p+1}| \\
 &\leq \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| + \sum_{p=1}^N \sum_{n=p}^N \frac{p-1}{N} |b_{p-1} - b_p| + \sum_{p=1}^N \sum_{n=1}^p \frac{N-p}{N} |b_p - b_{p+1}| \\
 &\leq \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| + \sum_{p=1}^N (N-p+1) \frac{p-1}{N} |b_{p-1} - b_p| + \sum_{p=1}^N p \frac{N-p}{N} |b_p - b_{p+1}| \\
 &\leq \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| + \sum_{p=1}^{N-1} (N-p) \frac{p}{N} |b_p - b_{p+1}| + \sum_{p=1}^{N-1} p \frac{N-p}{N} |b_p - b_{p+1}| \\
 &\leq \sum_{n=1}^N |b_n| + \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{N} |b_p - b_{p+1}| (p(N-p) + (N-p)p)
 \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $b_p - b_{p+1}$ intervient $N-p$ fois dans la première somme, p fois dans la deuxième, d'où

$$\sum_{n=1}^N |b_n| \leq \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| + \sum_{p=1}^{N-1} 2p(b_p - b_{p+1})$$

(en majorant $N-p$ par N) On a donc l'inégalité demandée (p et n sont des variables muettes); on en déduit que

$\sum_{n=1}^N |b_n|$ est majorée donc la série $\sum b_n$ est absolument convergente.

En conclusion la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à variations bornées et donc convergente.

2. La première inégalité est évidente car la série $\sum b_n$ est convergente. La deuxième est tout aussi évidente car $a_0 - a_N =$

$\sum_{n=1}^N b_n$ et en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on peut conclure.

3. En utilisant l'égalité de la question O.2, on a

$$Nb_{N+1} = \sum_{n=1}^N b_n - \sum_{n=1}^{N-1} nd_n$$

donc $(Nb_{N+1})_{N \in \mathbb{N}}$ a une limite et cette limite ne peut être que 0 (sinon $\sum b_n$ divergerait) d'où, quand N tend vers l'infini

$$\sum_{n=1}^{\infty} nd_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●