Devoir libre $n°07$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

–I–

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f continues sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

converge.
Soit F l'ensemble des applications f continues sur $]0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$$

converge.

1. Pour tout $f\in F$ et tout $t\in]0,-1]$, on a $|f(t)|\leq \frac{1}{2}\left(1+f^2(t)\right)$. Les intégrales $\int_0^1 1^2\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$ existent, il est de même de $\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$. Donc $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge et par conséquent $f\in E$.
On vérifie facilement que F est stable par toute combinaison linéaire, ce qui montre que F a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2. D'après le cours (exemples de Riemann), $f\in E$ si et seulement si $0<\alpha<1$ et $f\in F$ si et seulement si $0<2\alpha<1$, c'est-à-dire $0<\alpha<\frac{1}{2}$.

3. Soit $f:]0,1]\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\frac{\sin(t)}{t^\alpha}$ avec $\alpha>0$. f est bien définie et continue sur $]0,1]$ et garde un signe constant sur cet intervalle. On a $\lim\limits_{t\to0^+} t^{\alpha-1}f(t)=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sin(t)}{t}=1$, donc $f(t)\underset{0^+}{\sim}\frac{1}{t^{\alpha-1}}$. Ainsi $f\in E$ si et seulement si $\alpha-1<1$ ou encore $0<\alpha<2$.
De même, on a $\lim\limits_{t\to0^+} t^{2\alpha-2}f^2(t)=\lim\limits_{t\to0^+}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2=1$, donc $f^2(t)\underset{0^+}{\sim}\frac{1}{t^{2\alpha-2}}$. Ainsi $f\in F$ si et seulement si $2\alpha-2<1$ ou encore $0<\alpha<\frac{3}{2}$.

4. Pour n fixé, la fonction $f:t\mapsto(\ln(t))^n$ est bien définie et continue sur $]0,1]$ et garde un constant. De plus, on a $\lim\limits_{t\to0^+}\sqrt{t}\,(\ln(t))^n=0$, donc f est intégrable sur $]0,1]$. De même $\lim\limits_{t\to0^+}\sqrt{t}f^2(t)=0$, donc $f\in F$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

–II–

Soit G le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f continues sur $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

converge.

1. • La fonction f est continue sur $]0,1[$ et garde un signe constant sur cet intervalle ($\forall t\in]0,1[,\ f(t)\geq0$).
• $\lim\limits_{t\to1^-}\sqrt{1-t}f(t)=\lim\limits_{t\to1^-}\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{\sqrt{1-t}}{t}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
• $\lim\limits_{t\to0^+} f(t)=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\alpha(t)-\alpha(0)}{t}=\alpha'(0)=0$ où $\alpha(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge et par conséquent $f \in G$.

Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Posons $t = \sin(x)$, d'où :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x\sqrt{1-\sin^2 x}} - \frac{1}{\sin x}\right)\cos x \mathrm{d}x & (1)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x & (2)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x & (3)\\
&= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}} & (4)\\
&= \left[-2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}} & (5)\\
&= \ln(2) & (6)
\end{aligned}$$

2. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\ln(t)}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}$

(a) • f est continue sur $]0,1[$ et garde un signe constant sur $]0,1[$.

• $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \sqrt{t} f(t) = 0$.

• $\displaystyle\lim_{t\to 1^-} \sqrt{1-t} f(t) = 0$.

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge, c'est-à-dire f est un élément de G.

(b) Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ avec le changement de variable $x = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$.

$$x = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \Leftrightarrow t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Donc $\mathrm{d}t = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$, $1-t^2 = \dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}$ et $1+t = \dfrac{2}{1+x^2}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^0 \frac{\ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{\frac{2}{1+x^2}\times\frac{2x}{1+x^2}} \times \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x & (7)\\
&= \int_0^1 \ln\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x & (8)\\
&= \int_0^1 \ln(1-x^2)\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x & (9)\\
&= \int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x - \left[x\ln(1+x^2)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x & (10)\\
&= \int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x - \ln 2 + 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x & (11)\\
&= \left[-(1-x)\ln(1-x) - x\right]_0^1 + \left[(1+x)\ln(1+x) - x\right]_0^1 - \ln 2 + 2\left[x - \arctan x\right]_0^1 & (12)\\
&= \ln 2 - \frac{\pi}{2} & (13)
\end{aligned}$$

3. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{(\ln(t))^n}{(1-t)^\alpha}$ avec α réel et n entier naturel.

(a) • f est bien définie et continue sur $]0,1[$ et garde un signe constant pour α et n fixés.

• $\lim\limits_{t\to 0^+} \sqrt{t} f(t) = 0$, donc $f(t) \underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

• $f(t) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{(t-1)^n}{(1-t)^\alpha} = (-1)^n \dfrac{1}{(1-t)^{\alpha-n}}$. Donc f est intégrable sur $]0,1[$ si et seulement si $\alpha < 1+n$.

(b) Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$. Utilisons le changement de variable $t = 1-u^2$, donc $\mathrm{d}t = -2u\mathrm{d}u$ et par conséquent

$$\begin{aligned} I &= \int_1^0 \frac{\ln(1-u^2)}{u}(-2u\mathrm{d}u) = \int_0^1 \ln(1-u^2)\mathrm{d}u && (14)\\ &= \int_0^1 \ln(1-u)\mathrm{d}u + \int_0^1 \ln(1+u)\mathrm{d}u && (15)\\ &= [-(1-u)\ln(1-u) - u + (1+u)\ln(1+u) - u]_0^1 && (16)\\ &= 4\ln 2 - 4 && (17) \end{aligned}$$

4. Soit $f_\alpha :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(t) = \dfrac{t^\alpha - 1}{\ln(t)}$ avec α réel.

(a) • f_α est continue sur $]0,1[$ et garde un signe constant suivant les valeurs de α sur cet intervalle.

• $\lim\limits_{t\to 1^-} f_\alpha(t) = \alpha \lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{t^\alpha - 1}{\ln(t^\alpha)} = \dfrac{\alpha}{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}} = \alpha$. Donc f_α se prolonge par continuité en 1.

• Soit $\varepsilon > 0$. $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ converge, car $\dfrac{1}{\ln t} \underset{0^+}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{-\alpha}\left(\dfrac{t^\alpha}{\ln t}\right) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{\ln t} = 0$, donc $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{t^\alpha}{\ln t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^\varepsilon \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement $\alpha > -1$ et donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\mathrm{d}t$ converge aussi si et seulement si $\alpha > -1$. D'où $U =]-1, +\infty[$.

(b) Soit $\alpha > -1$. On a :

$$I_\alpha(x) = \int_0^x \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^\alpha}{\ln t}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

Posons $u = t^{\alpha+1}$, donc $t = u^{\frac{1}{\alpha+1}}$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\alpha+1}u^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}\mathrm{d}u$. En utilisant ce changement de variable dans la première intégrale on obtient :

$$\int_0^x \frac{t^\alpha}{\ln t}\mathrm{d}t = \int_0^{x^{\alpha+1}} \frac{u^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}{\ln u^{\frac{1}{\alpha+1}}} \times \frac{1}{\alpha+1}u^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}\mathrm{d}u = \int_0^{x^{\alpha+1}} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u}$$

Ainsi :

$$I_\alpha(x) = \int_0^{x^{\alpha+1}} \frac{\mathrm{d}u}{\ln u} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

(c) Soit $t \in [x^{\alpha+1}, x]$ avec $x \in]0,1[$. Donc $\dfrac{x^{\alpha+1}}{t} \le 1 \le \dfrac{x}{t}$ et comme $t \in]0,1[$ alors $\ln t < 0$, d'où

$$\frac{x}{t\ln t} \le \frac{1}{\ln t} \le \frac{x^{\alpha+1}}{t\ln t}$$

Ce qui entraîne par intégration sur l'intervalle $[x^{\alpha+1}, x]$:

$$x\int_{x^{\alpha+1}}^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \le \int_{x^{\alpha+1}}^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \le x^{\alpha+1}\int_{x^{\alpha+1}}^x \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

$$x\left[\ln(\ln t)\right]_{x^{\alpha+1}}^x \le -I_\alpha(x) \le x^{\alpha+1}\left[\ln(\ln t)\right]_{x^{\alpha+1}}^x$$

où encore

$$x^{\alpha+1}\ln(\alpha+1) \leq I_\alpha(x) \leq x\ln(\alpha+1)$$

D'où $I_\alpha = \lim\limits_{x\to 1} I_\alpha(x) = \ln(\alpha+1)$.

• • • • • • • • • • •