

Devoir libre n°10

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • •

Exercice Question préliminaire : Posons $F(x, y) = \int_{u(x)}^{v(x)} h(y, t) dt$ de telle sorte que $H(x) = F(x, x)$. Donc H est dérivable sur son domaine de définition et

$$H'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, x).$$

Soit $G : t \mapsto G(y, t)$ une primitive de l'application $t \mapsto h(y, t)$, donc $F(x, y) = G(y, v(x)) - G(y, u(x))$ et $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = h(y, v(x))v'(x) - h(y, u(x))u'(x)$.

D'autre part, d'après le théorème de dérivation sous signe intégral, $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial h}{\partial x}(y, t) dt$. D'où :

$$H'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt + h(y, v(x))v'(x) - h(y, u(x))u'(x).$$

1. (a) Posons $\theta_n(t) = \begin{cases} \frac{3n}{4}(1 - n^2 t^2) & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\theta_n(t)dt = f_n(x) = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)\theta_n(t)dt.$$

Soit I un intervalle borné tel que $f(x) = 0$ pour tout $x \notin I$.

Si $x \notin I + \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, alors $x - I \cap \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \emptyset$ ($x - I = \{x - \alpha | \alpha \in I\}$), en effet supposons qu'il existe $y \in x - I \cap \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, donc $y = x - \alpha$ avec $\alpha \in I$, on obtient alors $x = y + \alpha \in I + \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ ce qui est absurde. Ainsi $\forall t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, $f(x+t)\theta_n(t) = 0$, donc f_n est nulle en dehors de $I + \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$.

(b) f étant bornée sur $\mathbb{R}$, donc il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{3n}{4} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x+t)|(1 - n^2 t^2) dt \leq M \frac{3n}{4} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} (1 - n^2 t^2) dt = M.$$

D'où $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq M$.

2. En utilisant le changement de variable $u = x + t$, on obtient $f_n(x) = \frac{3n}{4} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(u)(1 - n^2(x-u)^2) du$. Ainsi, d'après la question préliminaire, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{3n}{4} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(u)(-2n^2(x-u)) du + f\left(x + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{n^2}{n^2}\right) + f\left(x - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{n^2}{n^2}\right) \\ &= -\frac{3n^3}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(u)(x-u) du \\ &= \frac{3n^3}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x+t)t dt. \end{aligned}$$

3. Soit K un compact de $\mathbb{R}$, donc il existe $a > 0$ tel que $K \subset [-a, a]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} (f(x+t) - f(x)) \theta_n(t) dt \right| \leq \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x+t) - f(x)| \theta_n(t) dt.$$

Soit $K_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid d(x, K) \leq \frac{1}{n} \leq 1 \right\} \cap [-a-1, a+1]$. K_1 est un compact et $K \subset K_1$. Comme f est uniformément continue sur le compact K_1 , alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $|t| \leq \alpha \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon$. D'autre part, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} \leq \alpha$ dès que $n \geq n_0$ et donc $\forall n \geq n_0$, $|t| \leq \frac{1}{n} \leq \alpha$ implique $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ et ceci pour tout $x \in K_1$. En particulier, $\forall x \in K$, on a $\sup_K |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ et donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers sur K .

4. • Supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_0 > 0$ tel que $x \geq x_0 \Rightarrow l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$ (*). Donc pour $x > x_0 + \frac{1}{n}$ on peut écrire :

$$(l - \varepsilon) \frac{3n}{4} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (1 - n^2(x-u)) du \leq \frac{3n}{4} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(u)(1 - n^2(x-u)) du \leq (l + \varepsilon) \frac{3n}{4} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} (1 - n^2(x-u)) du.$$

D'où

$$l - \varepsilon \leq f_n(x) \leq l + \varepsilon$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = l$.

• On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'_n(x) = \frac{3n^3}{2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(u)(u-x) du$. La relation (*) entraîne, pour $x > x_0 + \frac{1}{n}$,

$$(l - \varepsilon) \frac{3n^3}{2} \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} t dt \leq f'_n(x) \leq (l + \varepsilon) \frac{3n^3}{2} \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} t dt$$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'_n(x) = 0$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x)$ existe, donc $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + t\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. Pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $|t| < \eta \Rightarrow |\varepsilon(t)| < \varepsilon$. D'autre part, il existe n_0 tel $n \geq n_0 \Rightarrow |t| < \frac{1}{n} \leq \eta$, donc

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= \frac{3n^3}{2} \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} (f(x) + tf'(x) + t\varepsilon(t)) t dt \\ &= f'(x) \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{3n^3}{2} t^2 dt + \frac{3n^3}{2} \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} t^2 \varepsilon(t) dt \\ &= f'(x) + \frac{3n^3}{2} \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} t^2 \varepsilon(t) dt \end{aligned}$$

Donc $|f'_n(x) - f'(x)| = \frac{3n^3}{2} \left| \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} t^2 \varepsilon(t) dt \right| \leq \varepsilon \frac{3n^3}{2} \left| \int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}} t^2 dt \right| = \varepsilon$. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \Rightarrow |f'_n(x) - f'(x)| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$.

Problème

1. Si $\|\cdot\|$ est différentielle en 0 de différentielle $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, on a alors pour tout h de $\mathbb{R}^n$ non nul :

$$\|h\| = \|0 + h\| = \|0\| + u(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h)}{\|h\|} = 1$ avec u linéaire, ce qui n'est pas possible, car sinon pour h non nul, on

$$\text{aurait } 1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(th)}{\|th\|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(h)}{\|h\|} = 1 \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(th)}{\|th\|} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-u(h)}{\|h\|} = -1.$$

2. Pour $n = 1$, on a $f_j(x) = |x|$ pour $j = 1, 2, \infty$ et cette application est différentiable sur $\mathcal{P}_j = \mathbb{R}^*$ de dérivée
- $$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
3. (a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{\Delta_1, \Delta_2\}$ où Δ_1 la droite d'équation $y = x$ et Δ_2 la droite d'équation $y = -x$.
 (b) Pour $n \geq 2$, $0 \notin \mathcal{P}_\infty$, donc $\mathcal{P}_\infty \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

On peut écrire $\mathcal{P}_\infty = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{C}_k$, avec $\mathcal{C}_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}, |x_j| < |x_k|\}$ qui s'écrit égale-

ment $\mathcal{C}_k = \bigcap_{j=1, j \neq k}^n \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_j| < |x_k|\} = \bigcap_{j=1, j \neq k}^n \mathcal{C}_{k,j}$ chaque partie $\mathcal{C}_{k,j}$ étant ouvert comme image

réci-proque de l'ouvert $]0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $x \mapsto |x_k| - |x_j|$. En conclusion, $\mathcal{P}_\infty$ est un ouvert comme réunion d'ouverts.

- (c) Puisque $\mathcal{C}_k$ est un ouvert, alors il existe un réel $r > 0$ tel que $B_\infty = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\} \subset \mathcal{C}_k$ donc pour $h \in B_\infty(0, r)$, on a $x + h \in \mathcal{C}_k$ et $\|x + h\|_\infty = |x_k + h_k|$. Comme x_k est non nul, car $\|x\|_\infty = |x_k|$, en prenant r assez petit, le réel $x_k + h_k$ sera de même signe que x_k , ce qui peut se traduire par la relation

$$|x_k + h_k| = \frac{x_k}{|x_k|}(x_k + h_k) = |x_k| + \frac{x_k}{|x_k|}h_k$$

pour tout $h \in B_\infty(0, r)$, donc

$$\|x + h\|_\infty = |x_k + h_k| = |x_k| + \frac{x_k}{|x_k|}h_k = \|x\|_\infty + u(h)$$

où u est l'application linéaire définie par $u(h) = \frac{x_k}{|x_k|}h_k$. L'application f_∞ est donc différentiable en x et sa différentielle est définie par :

$$\begin{aligned} d(f_\infty)_x(h) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \frac{x_k}{|x_k|}h_k \end{aligned}$$

- (d) Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}_\infty$ et $j < k$ avec $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ et distincts et tels que $\|x\|_\infty = |x_k| = |x_j| > 0$. Si f est différentiable en x , il existe alors une application linéaire u telle que

$$\|x + h\|_\infty = \|x\|_\infty + u(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. On a pour tout $t > 0$,

$$\|x \pm te_k\|_\infty = \|x\|_\infty + tu(h) + \|h\|o(t)$$

avec $|x_k + t| = |x_k| \left(1 + \frac{t}{|x_k|}\right) > |x_k| \geq |x_i|$ pour tout i compris entre 1 et n et $|x_k - t| = |x_k| \left(1 - \frac{t}{|x_k|}\right) < |x_k| = |x_j|$ pour $0 < t < \alpha$ avec $\alpha > 0$ assez petit, donc :

$$|x_k + t| = \|x + te_k\|_\infty = \|x\|_\infty + tu(e_k) + o(t) = |x_k| + tu(e_k) + o(t)$$

et

$$|x_k| = |x_j| = \|x - te_k\|_\infty = \|x\|_\infty - tu(e_k) + o(t) = |x_k| - tu(e_k) + o(t)$$

De cette dernière égalité on déduit que $u(e_k) + o(1) = 0$, donc $u(e_k) = 0$ et l'égalité précédente donne $|x_k + t| = |x_k| + o(t)$. En prenant α assez petit, $x_k + t$ sera de même signe que x_k , donc

$$|x_k + t| = \frac{x_k}{|x_k|}(x_k + t) = \frac{x_k}{|x_k|}x_k + o(t)$$

soit $t = o(t)$, ce qui n'est pas vrai. La fonction f_∞ n'est donc pas différentiable en x et comme elle n'est pas différentiable en 0, $\mathcal{P}_\infty$ est bien l'ensemble cherché.

4. (a) $\mathcal{P}_1 = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ avec $\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq 0\}$.

- (b) Pour $n \geq 2$, 0 n'est pas dans $\mathcal{P}_1$, donc $\mathcal{P}_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a $\mathcal{P}_1 = \bigcap_{k=1}^n \mathcal{D}_k$, où chaque $\mathcal{D}_k = \{x \in \mathbb{R}^n | x_k \neq 0\}$ est un ouvert comme image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application continue $x \mapsto x_k$.

- (c) Comme $\mathcal{P}_1$ est un ouvert, il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout $h \in B_1(0, r) = \{h \in \mathbb{R}^n | \|h\|_1 < r\}$ et tout k compris entre 1 et n , $x_k + h_k$ soit du même signe que x_k . On a alors, pour tout $h \in B_1(0, r)$:

$$\|x + h\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k + h_k| = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{|x_k|}(x_k + h_k) = \sum_{k=1}^n |x_k| + \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{|x_k|}h_k = \|x\|_1 + u(h)$$

où u est l'application linéaire définie par

$$u(h) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{|x_k|}h_k.$$

L'application f_1 est donc différentiable en x de différentielle :

$$\begin{aligned} d(f_1)_x : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\longmapsto \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{|x_k|}h_k \end{aligned}$$

- (d) Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{P}_1$ et $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $x_k = 0$. Si f_1 est différentiable en x , il existe alors une application linéaire u telle que

$$\|x + h\|_1 = \|x\|_1 + u(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. On a pour tout $t > 0$,

$$\|x \pm te_k\|_1 = \sum_{j=1, j \neq k}^n |x_j| + t = \|x\|_1 + t = \|x\|_1 \pm tu(h) + o(t),$$

donc $\pm u(e_k) + o(1) = 1$ et en faisant tendre t vers 0 on aboutit à $\pm u(e_k) = 1$, ce qui n'est pas possible. La fonction f_1 n'est donc pas différentiable en x et comme elle n'est pas différentiable en 0, $\mathcal{P}_1$ est bien l'ensemble cherché.

5. Notons $(\cdot | \cdot)$ le produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_2$. L'application f_2 est la composée de l'application l qui à x associe (x, x) , de l'application b qui à (u, v) associe $(u|v)$ et de la fonction $r : t \mapsto \sqrt{t}$. Comme l est linéaire, sa différentielle est elle-même, c'est-à-dire pour tout x la différentielle $dl_x = l$ et donc $dl_x(h) = l(h) = (h|h)$. Comme b est bilinéaire, sa différentielle en (u, v) est $(h, k) \mapsto b(u, k) + b(h, v)$, c'est-à-dire $db_{(u,v)}(h, k) = (u|k) + (h|v)$. D'où

$$d(b \circ l)_x(h) = db_{(f(x))}((df(x)(h))) = 2(x|h).$$

Enfin la différentielle de r en a est l'application $h \mapsto \frac{h}{2\sqrt{a}}$ et donc

$$d\left(\sqrt{g \circ f}\right)_x(h) = dr_{g(f(x))}(db_{f(x)}(dl_x(h))) = \frac{(x|h)}{\|x\|_2}$$

• • • • •