Devoir libre $n^\circ 01$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

●●●●●●●●●●●

Exercice 1

1. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^*$, on a $M(x)M(y) = M(xy)$. Donc l'ensemble $G = \{ M(x) \mid x \in \mathbb{K}^* \}$ est stable par multiplication. La loi induite est associative, admet pour élément neutre la matrice $E = M(1)$, et $M(x)$ est inversible dans G d'inverse $M\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Donc G est donc un groupe multiplicatif de matrices sans être un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

2. $\det(A) = 0$, donc A n'est pas inversible ($A \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$). On constate que $A^3 = -A$, $A^4 = -A^2$, puis $A^5 = A$, donc G se réduit à l'ensemble $\{A, A^2, A^3, A^4\}$. G à 4 éléments, est stable pour la multiplication, et la loi induite est commutative.

$\times$	A	A^2	A^3	A^4
A	A^2	A^3	A^4	A
A^2	A^3	A^4	A	A^2
A^3	A^4	A	A^2	A^3
A^4	A	A^2	A^3	A^4

On voit sur la table que l'élément neutre est $E = A^4$, et que tout élément est inversible. Ainsi, G est un groupe, d'ailleurs cyclique et engendré par A.
$E^2 = E$, donc E est un projecteur. On vérifie après calcul que c'est le projecteur orthogonal sur le plan d'équation $x - 2y + 2z = 0$.
L'inverse de A dans G est A^3.
Plus généralement, si A est une matrice telle que $A^k = A$, où $k \geq 2$, k étant le plus petit indice tel que $A^k = A$, alors $G = \{ A^n \mid n \geq 1 \}$ est un groupe multiplicatif à k éléments, de neutre A^{k-1}, et cyclique.

Exercice 2

1. Montrons que $T(u)$ commute avec tout $h \in G$. Les termes de la somme dans $T(u)h$ sont de la forme :

$$g^{-1}ugh = hh^{-1}g^{-1}ugh = h(gh)^{-1}u(gh) = hf^{-1}uf$$

(en ayant posé $f = gh$) qui sont donc en bijection avec les termes de la somme dans $hT(u)$ par la translation $g \mapsto hg$ d'où :

$$T(u)h = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}ugh = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} hh^{-1}g^{-1}ugh = \frac{h}{m}\sum_{g\in G}(gh)^{-1}u(gh) = \frac{h}{m}\sum_{f\in G} f^{-1}uf = hT(u).$$

Ainsi

$$\forall h \in G,\ T(u)h = hT(u).$$

2. Calculons T^2. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on a :

$$T^2(u) = \frac{1}{m}\sum_{h\in G} h^{-1}\left(\frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}ug\right)h = \frac{1}{m^2}\sum_{h\in G}\sum_{g\in G} h^{-1}g^{-1}ugh$$

par distribution du produit de composition par rapport à l'addition. Que l'on réécrit :

$$T^2(u) = \frac{1}{m^2}\sum_{h\in G}\left(\sum_{g\in G}(gh)^{-1}u(gh)\right).$$

Or l'application $x \mapsto xh$ est une bijection de G donc quand g parcourt G, gh le parcourt également. Soit en posant $f = gh$ on a :

$$\sum_{g\in G}(gh)^{-1}u(gh) = \sum_{f\in G} f^{-1}uf = mT(u)$$

D'où en mettant $mT(u)$ en facteur :

$$T^2(u) = \frac{1}{m^2}mT_u\sum_{h\in G}1 = T(u).$$

Ceci montre que T est un projecteur de $\mathscr{L}(E)$.

3. (a) Soit $g \in G$, comme $p(E) = F$ alors $pg(x) \in F$ pour tout $x \in E$ et par stabilité il vient $g^{-1}pg(x) \in F$, par suite $T(p)(x) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{g\in G} g^{-1}pg(x) \in F$ d'où : $T(p)(E) \subset F$.

p est un projeteur sur $p(E) = F$ donc $p_{|F} = id_F$, et puisque $\forall y \in F$, $g(y) \in F$ (F stable par les éléments de G) alors $\forall y \in F$, $pg(y) = g(y)$ d'où :

$$T(p)(y) = \frac{1}{m}\sum_{g\in G} g^{-1}pg(y) = y$$

Ce qui prouve que :

$$T(p)(F) = F.$$

Ces deux points montre que l'image de $T(p)$ est F.

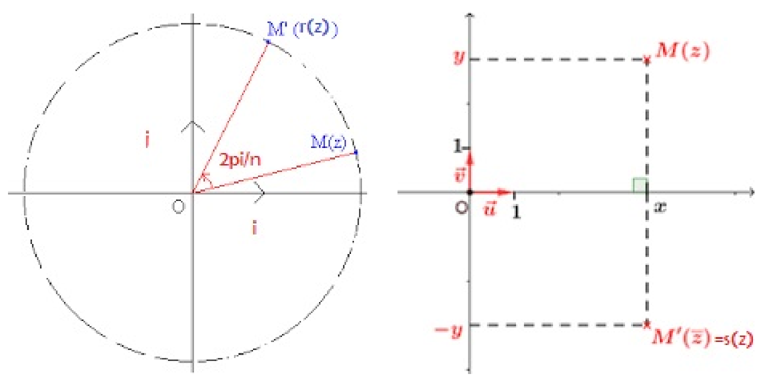
(b) Pour montrer que le noyau de $T(p)$ est stable par tout élément g de G, il faut que si $x \in \ker(T(p))$ alors $g(x) \in \ker(T(p))$ autrement dit si $T(p)(x) = 0$ alors $T(p)(g(x)) = 0$. On utilise le fait que $\forall g \in G$, $T(u)g = gT(u)$ donc en particulier

$$T(p)(g(x)) = g(T(p)(x)),$$

d'où $T(p)(g(x)) = g(0) = 0$ car g est linéaire.

Problème

1. (a) r est une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ et s est une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



(b) Il est clair que $r^n = e$ et $s^2 = e$. D'autre part, si $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
r \circ s \circ r(z) &= r \circ s\left(\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]z\right) && (1)\\
&= r\left(\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]\overline{z}\right) && (2)\\
&= \left(\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]\right)\left(\left[\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]\overline{z}\right) = \overline{z} && (3)\\
&= s(z) && (4)
\end{aligned}$$

Ainsi $r \circ s \circ r = s$.

2. Il suffit de remarque que si $p \in \mathbb{Z}$, r^p est une rotation d'angle $\dfrac{2p\pi}{n}$ et donc d'après ce qui précède,

$$r^p \circ s \circ r^p = s$$

ce qui est équivalent à $r^p \circ s = s \circ r^{-p}$.

3. • $\forall (h,k) \in \mathbb{Z}^2$, $r^h \circ s^k \in \mathscr{B}$ c'est la composée de bijections donc est une bijection de $\mathbb{C}$,
• $\forall (h,k) \in \mathbb{Z}^2$, $\forall (h',k') \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$(r^h \circ s^k) \circ (r^{h'} \circ s^{k'})^{-1} = r^h \circ s^{k-k'} \circ r^{-h'}.$$

∘ Si $k-k'$ est pair, alors $s^{k-k'} = e$ et $(r^h \circ s^k) \circ (r^{h'} \circ r^{k'})^{-1} = r^{h-h'}$.
∘ Si $k-k'$ est impaire, on obtient $s^{k-k'} = s$ et $(r^h \circ s^k) \circ (r^{h'} \circ r^{k'})^{-1} = r^h \circ s \circ r^{-h'} = r^{h+h'} \circ s$.
D'où

$$G_1 = \left\{ r^h \circ s^h \,\middle|\, (h,k) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

est un sous-groupe de $\mathscr{B}$.
Montrons que le nombre d'éléments de D est $2n$. En effet, un élément quelconque de D s'écrit par définition

$$d = r^{h_1} \circ s^{k_1} \circ r^{h_2} \circ s^{k_2} \circ \ldots \circ r^{h_t} \circ s^{k_t}$$

nous pouvons l'écrire aussi :

$$d = (r^{h_1} \circ s^{k_1}) \circ (r^{h_2} \circ s^{k_2}) \circ \ldots \circ (r^{h_t} \circ s^{k_t}) = g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_t$$

où $\forall i$, $g_i \in G_1$ donc de $d_1 \in G_1$ (G_1 est un sous-groupe de $\mathscr{B}$), alors il existe un couple $(h,k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $d = r^h \circ s^k$.
• Si k est pair, $d = r^h$.
∘ Si $h \geq 0$, d'après la division euclidienne par n on a $h = an + b$ avec $0 \leq b \leq n-1$, donc

$$d = r^h = r^{an+b} = r^b.$$

∘ Si $h < 0$, $-h = a'n + b'$ avec $0 \leq b' \leq n-1$ d'où :

$$d = r^{-(-h)} = r^{-a'n-b'} = r^{-b'} = r^{n-b'}$$

• Si k es impair $d = r^h \circ s$.
De même comme dans le cas précédent $h \geq 0$, on a :

$$d = r^b \circ s$$

avec $b \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ où $h = an+b$, $b \in \{0,1,\ldots,n-1\}$, et si $h < 0$, $d = r^{n-b'} \circ s$ avec $n-b' \in \{1,2,\ldots,n-1\}$.
Unicité :
Supposons que l'on a $r^b = r^{b'}$ (si $r^b \circ s = r^{b'} \circ s$ on se ramène au cas précédent en composant à droite par $s^{-1} = s$).
Nous pouvons supposer $b > b'$, alors $r^{b-b'} = e$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^{\frac{2i(b-b')}{n}} z = z$, ce qui entraîne que $b - b' = cn$, avec $c \in \mathbb{N}$. Or $(b,b') \in \{0,1,\ldots,n-1\}^2$ d'où $b - b' \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ et par conséquent $b' = b$.
Montrons enfin que $r^b = r^{b'} \circ s$ ou encore $r^{b-b'} \circ s = e$ est impossible car sinon l'égalité précédente s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos \dfrac{2(b-b')\pi}{n} & -\sin \dfrac{2(b-b')\pi}{n} \\ \sin \dfrac{2(b-b')\pi}{n} & \cos \dfrac{2(b-b')\pi}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La comparaison des déterminants conduit à une contradiction.
Enfin :

$$\operatorname{card} D = \operatorname{card}\{0,1,\ldots,n-1\} \times \{0,1\} = 2n$$

puisque à tout élément de D, il correspond un élément unique de $\{0,1,\ldots,n-1\} \times \{0,1\}$.

4. r^h c'est la composée de h rotations d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$, donc c'est une rotation d'angle $\dfrac{2h\pi}{n}$ et $r^h \circ s$ c'est la composé d'une rotation et d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

5. (a) C'est clair (comme dans le cas de la question 1. b)).

(b) On a

$$\text{card}(H) \leq \text{card}\{0, 1, ..., n-1\} \times \{0, 1\} = 2n$$

car tout élément de la forme $a^k b^h$ de dans H et que tout élément de H est de cette forme. On a $H = G = [a, b]$, on ne peut affirmer que $\text{card}(H) = 2n$, étant donné que l'on est plus assuré de l'unicité, c'est-à-dira qu'il peut exister deux couples $(h, k) \neq (h', k')$ tels que $a^h b^k = a^{h'} b^{k'}$.

(c) Par analogie avec la question 3. essayons de montrer que :

$$\text{card}(H) = 2n \Leftrightarrow \begin{cases} b \notin (a) \\ n = \inf\{\, s \in \mathbb{N} \mid a^s = e \,\} \end{cases}$$

Supposons que $b \notin (a)$ et que $n = \inf\{\, s \in \mathbb{N} \mid a^s = e \,\}$.
Tout élément de H se met sous la forme $a^h b^k$, $(h, k) \in \{0, 1, ..., n-1\} \times \{0, 1\}$.
Supposons que $a^h b^k = a^{h'} b^{k'}$ et montrons que $h = h'$ et $k = k'$ ce qui permutera d'affirmer que $2n \leq \text{card}(H)$, et la question (b) implique $\text{card}(H) = 2n$.
• si $k = 0$ et $k' = 1$ alors $a^h = a^{h'} b$ entraine $a^{h-h'} = b$
• si $k = 1$ et $k' = 0$ alors $a^h b = a^{h'}$ entraîne $a^{h'-h} = b$ dans les deux cas $b \in (a)$ et ceci est absurde.
• si $k = 0$, $k' = 0$ donc $a^h = a^{h'}$.
• si $k = 1$, $k' = 1$ donc $a^h b = a^{h'} b$ ceci entraîne $a^{h-h'} = e$ et $h - h' \in \{0, 1, ..., n-1\}$ d'où $h' = h$, sinon on aurait plus $n = \inf\{\, s \in \mathbb{N} \mid a^s = e \,\}$.
Supposons maintenant que $\text{card}(H) = 2n$.
• si $b \in (a)$ donc il existe k tel que $b = a^k$ avec $k = nk_1 + k_2$ et $0 \leq k_2 \leq n-1$, d'où $b = a^{k_2}$ et $ab = a^{k_2+1} b^0$ et par conséquent $\text{card}(H) < 2n$ ce qui est absurde.
• s'il existe $s_0 < n$ tel que $a^{s_0} = e$, donc $a^{s_0} b^0 = a^0 b^0$ d'où la contradiction car $\text{card}(H) < 2n$. Supposons qu'il existe s_0 tel que $0 \leq s_o \leq n$, $a^{s_o} = a^n = e$ et $s_o = \inf\{\, s \in \mathbb{N} \mid a^s = e \,\}$. Par division euclidienne on a $n = n_0 s_0 + n_1$ avec $0 \leq n_1 \leq s_0 - 1$.
si $n_1 \neq 0$ on aura

$$e = a^n = a^{n_0 s_0 + n_1} = (a^{s_0})^n a^{n_1} = a^{n_1}$$

sinon la définition de s_0 est contre dite, donc $n_1 = 0$ et par suite $n = n_0 s_0$ ou encore s_0 divise n.
Une condition suffisante pour que $n = \inf\{\, s \in \mathbb{N} \mid a^s = e \,\}$ est que n soit premier l'exemple étudié dans les trois premières question montre qu'elle n'est pas nécessaire.

• • • • • • • • • • •