

Devoir libre n°02

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • •

A. Étude des g -inverses.

1. (a) p et sont des projecteurs de E , en effet, on a $p^2 = (vu)(vu) = v(uvu) = vu = p$. De même $q^2 = (uv)(uv) = uv = q$.

L'égalité $q = uv$ entraîne $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(u)$, et $u = qu$ entraîne $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(q)$. Donc $\text{Im}(q) = \text{Im}(u)$. D'autre part, la relation $p = vu$ implique $\ker(u) \subset \ker(p)$, et $u = up$ implique $\ker(p) \subset \ker(u)$. Donc $\ker(p) = \ker(u)$.

- (b) Montrons que $\text{rg}(p) = \text{rg}(q) = \text{rg}(u) \leq \text{rg}(v)$. D'après le théorème du rang on a :

$$\text{rg}(p) = \dim(E) - \dim \ker(p) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = \text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\text{Im}(q)) = \text{rg}(q).$$

Enfin, $p = vu$ entraîne $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(v)$ et donc $\text{rg}(p) \leq \text{rg}(v)$.

- (c) Soit $E_1 = \text{Im}(p)$, c'est un supplémentaire de $\ker(p) = \ker(u)$ dans E , car p est un projecteur. On sait que u induit un isomorphisme $\varphi = u|_{E_1}$ de E_1 sur $\text{Im}(u)$ ($\ker(\varphi) = \ker(u) \cap E_1 = \{0\}$).

Soient y un vecteur de $\text{Im}(u)$, x l'unique vecteur de E_1 tel que $u(x) = y$. On a $x = v(y)$. En effet $v(y) = (vu)(x) = p(x) = x$, puisque x appartient à $\text{Im}(p)$. Donc la restriction de v à $\text{Im}(u)$ coïncide avec $\varphi = u|_{E_1}$.

2. (a) Construction d'une g -inverse. Soit E_1 un supplémentaire quelconque de $\ker(u)$ dans E . Soit $\varphi = u|_{E_1}$ l'isomorphisme de E_1 sur $\text{Im}(u)$ induit par u .

Enfin, soit $v \in \mathcal{L}(F, E)$ une application linéaire de F dans E prolongeant φ^{-1} . Une telle application existe : il suffit de se donner sa restriction w à un supplémentaire F_1 de $\text{Im}(u)$ dans F (par exemple l'application nulle), et de poser $v(y) = \varphi^{-1}(y_{\text{Im}(u)}) + w(y_{F_1})$. Je dis que v est une g -inverse de u . En effet soit $x \in E$, écrivons $x = x_{\ker u} + x_{E_1}$ ($E = \ker(u) \oplus E_1$). On a $u(x) = u(x_{E_1})$, et $(v.u)(x) = x_{E_1}$, et pour finir $(u.v.u)(x) = u(x_{E_1}) = u(x)$.

- (b) Le rang de v peut prendre toute valeur comprise entre $\text{rg}(u)$ et $\min(\dim(E), \dim(F))$. En effet, v prolongeant φ^{-1} est telle que $\text{rg}(v) \geq \text{rg}(\varphi^{-1}) = \text{rg}(u)$. Si l'on prend pour w une application linéaire de F_1 dans $\ker(u)$, alors $\text{rg}(v) = \text{rg}(\varphi^{-1}) + \text{rg}(w)$.

Or $\text{rg}(w)$ prend toute valeur comprise entre 0 et $\min(\dim(F_1), \dim(\ker(u))) = \min(\dim(F) - \text{rg}(u), \dim(\ker(u)))$. Ainsi, $\text{rg}(u) \leq (\dim(F), \dim(\ker(u)) + \text{rg}(u)) = \min(\dim(F), \dim(E))$.

- (c) Les g -inverses de u forment un sous-espace affine de $\mathcal{L}(F, E)$. En effet, si v_0 est une g -inverse, les autres sont de la forme $v = v_0 + w$, où $u.w.u = 0$, c'est-à-dire $w(\text{Im}(u)) \subset \ker(u)$. Or ces fonctions forment un sous-espace vectoriel de dimension

$$\dim(\text{Im}(u)) \times \dim(\ker(u)) + (\dim(F) - \dim(\text{Im}(u))) \times \dim(E) = \dim(E) \times \dim(F) - (\text{rg}(u))^2.$$

- (d) Cas particuliers.

- Si $u = 0$, toute application v est une g -inverse.
- Si u est injective, $uvu = u \Leftrightarrow vu = id_E$. Les g -inverses de u sont ses inverses à gauche.
- Si u est surjective, $uvu = u \Leftrightarrow uv = id_F$. Les g -inverses de u sont ses inverses à droite.
- Enfin, si u est bijective, $uvu = u \Leftrightarrow v = u^{-1}$. Seule g -inverse qui est l'inverse de u au sens usuel.

3. Retrouvons ces résultats matriciellement : Choisissons des bases de E et F telles que $\text{Mat}(u, B_E, B_F) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(Toute matrice de rang r est semblable à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).

Cherchons v par sa matrice $\text{Mat}(v, B_F, B_E) = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$. Alors $uvu = u$ se traduit par

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire par $X = I_r$, Y , Z et T étant quelconques.

Toute application linéaire de F dans E telle que $\begin{pmatrix} I_r & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ est une g -inverse de u .

Cela montre l'existence d'une g -inverse et le fait que les g -inverses forment un espace affine de dimension $n \times p - r^2$.

De plus, le rang de $\begin{pmatrix} I_r & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ peut prendre toute valeur comprise entre r et $\min(n, p)$: prendre Y et Z nulles et $T = I_s$, $0 \leq s \leq \min(n, p) - r$.

Remarquons que la plus simple des g -inverses est celle qui vérifie $\text{Mat}(v, B_F, B_E) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

B. Étude des f -inverses.

- Supposons que u admette une f -inverse v , u est alors une g -inverse de u , donc : $p = vu$ est un projecteur tel que $\ker(p) = \ker(u)$ et $\text{Im}(p) = \text{Im}(v)$, $q = uv$ est un projecteur tel que $\ker(q) = \ker(v)$ et $\text{Im}(q) = \text{Im}(u)$.

En conséquence, $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p) = \text{Im}(v) \oplus \ker(u)$, $F = \ker(q) \oplus \text{Im}(q) = \ker(v) \oplus \text{Im}(u)$ et $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$.

- (a) Si $E = \ker(u) \oplus E_1$ et $F = \text{Im}(u) \oplus F_1$, et s'il existe une f -inverse v de u telle que $\ker(v) = F_1$ et $\text{Im}(v) = E_1$, alors, soit $y \in F$, $y = y_{\text{Im}(u)} + y_{F_1}$, $v(y) = v(y_{\text{Im}(u)}) = (u|_{E_1})^{-1}(y_{\text{Im}(u)}) = (u|_{E_1})^{-1}q(y)$, où q est le projecteur sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à F_1 .

Réciproquement, définissons v ainsi.

Soit $x \in E$, $x = x_{\ker(u)} + x_{E_1}$, $u(x) = u(x_{E_1})$, $vu(x) = x_{E_1}$ et $(uvu)(x) = u(x_{E_1}) = u(x)$.

Soit $y \in F$, $y = y_{\text{Im}(u)} + y_{F_1}$, $v(y) = (u|_{E_1})^{-1}(y_{\text{Im}(u)})$, $(uv)(y) = y_{\text{Im}(u)}$, $(vuv)(y) = v(y_{\text{Im}(u)}) = v(y)$.

(b) Cas particuliers.

- Si u est nulle, la seule f -inverse de u est l'application nulle.
- Si u est injective, $u.v.u = u$ et $v.u.v = v \Leftrightarrow v.u = \text{id}_E$. Les f -inverses sont les inverses à gauche.
- Si u est surjective, $u.v.u = u$ et $v.u.v = v \Leftrightarrow u.v = \text{id}_F$. Les f -inverses sont les inverses à droite.
- Si u est bijective, la seule f -inverse de u est la bijection réciproque $v = u^{-1}$.

- Méthode matricielle. Choisissons des bases de E et F telles que $\text{Mat}(u, B_E, B_F) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Cherchons v par sa matrice $\text{Mat}(v, B_F, B_E) = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$. Alors $uvu = u$ et $vuv = v$ se traduisent par

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire par $X = I_r$ et $T = ZY$, autrement dit $\text{Mat}(v, B_F, B_E) = \begin{pmatrix} I_r & Y \\ Z & ZY \end{pmatrix}$.

On retrouve l'équivalence : v est une f -inverse de u si, et seulement si, v est une g -inverse de u et $\text{rg } u = \text{rg } v$, car les matrices $\begin{pmatrix} I_r & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ de rang r sont les matrices $\begin{pmatrix} I_r & Y \\ Z & ZY \end{pmatrix}$. En effet, on a :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ -Z & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & Y \\ Z & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & -Y \\ 0 & I_{p-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & T - ZY \end{pmatrix},$$

est de rang r si et seulement si, $T = ZY$.

- Exemples de f -inverses :

- La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pour f -inverses toutes les matrices $\begin{pmatrix} 1 & y \\ z & zy \end{pmatrix}$ où $x, y, z \in \mathbb{K}$.

• Soit $A = X^t Y$ une matrice de rang 1 (toutes les colonnes sont proportionnelles à la première). Cherchons ses f -inverses B . B est une g -inverse de rang 1, écrivons $B = U^t V$ (toute matrice de rang 1 s'écrit de cette façon !). On veut que l'égalité $(X^t Y)(U^t V)(X^t Y) = X^t Y$ soit bien vérifiée. Cela s'écrit à l'aide de l'associativité :

$$({}^t Y U)({}^t V X) X^t Y = X^t Y,$$

c'est-à-dire $({}^t Y U)({}^t V X) = 1$. Il y a beaucoup de couples (U, V) . Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut prendre, $U = \frac{Y}{\|Y\|^2}$ et

$$V = \frac{X}{\|X\|^2} \text{ (norme euclidienne usuelle). Ainsi, si } A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ est une } f\text{-inverse de}$$

A .

C. Applications.

1. RÉOLUTION D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE.

Pour que l'équation $u(x) = b$ ait au moins une solution, il faut et il suffit que $b \in \text{Im } u$. Comme $\text{Im}(u) = \text{Im}(q)$, $b \in \text{Im}(u) \Leftrightarrow b \in \text{Im}(q) \Leftrightarrow b = q(b) = (uv)(b)$.

- Si $b \neq (uv)(b)$, l'équation $u(x) = b$ est sans solution.
- Si $b = (uv)(b)$, l'équation $u(x) = b$ a au moins une solution, à savoir $x_0 = v(b)$.

Ses solutions sont de la forme $x = x_0 + y$, où y décrit $\ker(u)$. Or $\ker u = \ker(p) = \text{Im}(\text{Id}_E - p)$. Par conséquent, les solutions de $u(x) = b$ sont de la forme $v(b) + (\text{Id}_E - vu)(z)$, où z décrit E .

2. FACTORISATION À DROITE.

Soient $a \in \mathcal{L}(E, F)$, $c \in \mathcal{L}(G, F)$, a' une g -inverse de a . Montrons l'équivalence des trois propriétés :

- i) $\Rightarrow$ ii) $aa'c = aa'ax = ax = c$,
- ii) $\Rightarrow$ iii) $aa'c = c$ implique $\text{Im}(c) \subset \text{Im}(a)$,
- iii) $\Rightarrow$ ii) $\forall z \in G, c(z) \in \text{Im}(a) \Rightarrow aa'(c(z)) = c(z)$, car aa' est projecteur sur $\text{Im}(a)$. Donc $aa'c = c$.
- ii) $\Rightarrow$ i) évident : prendre $x = a'c$.

Supposons ces conditions satisfaites. Les solutions x de $ax = c$ sont de la forme $a'c + w$, où w est telle que $aw = 0$, c'est-à-dire $\text{Im}(w) \subset \ker(a)$. On peut dire que w est une application linéaire de G dans $\ker(a)$. Les solutions de $ax = c$ forment un sous-espace affine de dimension $\dim(G) \times \dim(\ker(a))$ de $\mathcal{L}(G, E)$.

3. FACTORISATION À GAUCHE.

Soient $c \in \mathcal{L}(G, F)$, $b \in \mathcal{L}(G, H)$, b' une g -inverse de b . Montrons l'équivalence des trois propriétés :

- i) $\Rightarrow$ ii) $cb'b = xbb'b = xb = c$,
- ii) $\Rightarrow$ iii) $cb'b = c$ implique $\ker(b) \subset \ker(c)$,
- iii) $\Rightarrow$ ii) Soit $z \in G$ fixé. Si $z \in \ker(b'b) = \ker(b) \subset \ker(c)$, alors $c(z) = 0$ et donc $cb'b(z) = c(z)$. Si $z \in \text{Im}(b'b)$, alors $b'b(z) = z$ et donc $cb'b(z) = c(z)$. Donc $cb'b = c$.
- ii) $\Rightarrow$ i) évident : prendre $x = cb'$.

Supposons ces conditions satisfaites. Les solutions x de $xb = c$ sont de la forme $cb' + w$, où w est telle que $wb = 0$, c'est-à-dire $\text{Im}(w) \subset \ker(b)$. w est entièrement déterminée par sa restriction à un supplémentaire de $\text{Im}(b)$ dans H . Elles forment donc un sous-espace affine de $\mathcal{L}(H, F)$ de dimension $(\dim(H) - \text{rg}(b)) \times \dim(F)$.

• • • • •