

Devoir libre n°09

Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

• • • • •

## Partie I

1. Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a la propriété  $\mathcal{P}(n)$  suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F(x) = \lambda^n F(x + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + ka).$$

- Pour  $n = 1$ , on a bien  $F(x) = \lambda F(x + a) + f(x) = \lambda^0 F(x + 0a) + \sum_{k=0}^0 \lambda^k f(x + ka)$ , donc  $\mathcal{P}(1)$  est bien vérifiée.
- Supposons la propriété vraie au rang  $n$ . Montrons que  $\mathcal{P}(n + 1)$  est vraie. On a par hypothèse de récurrence que

$$F(x + a) = \lambda^n F(x + a + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + a + ka).$$

De plus (\*) s'écrit  $F(x) = \lambda F(x + a) + f(x)$ , d'où :

$$F(x) = \lambda \left( \lambda^n F(x + a + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f(x + a + ka) \right) + f(x) \quad (1)$$

$$= \lambda^{n+1} F(x + a + na) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{k+1} f(x + a + ka) + f(x) \quad (2)$$

$$= \lambda^{n+1} F(x + (n + 1)a) + \sum_{k=0}^n \lambda^k f(x + ka). \quad (3)$$

La propriété  $\mathcal{P}(n + 1)$  est donc vraie.

Même raisonnement pour la deuxième égalité en remarquant que (\*) est équivalent à

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \lambda^{-1} F(x - a) - \lambda^{-1} f(x).$$

2. La fonction nulle appartient à  $\mathcal{L}$ . De plus, si  $f$  et  $g$  sont lipschitziennes de constantes  $K_f$  et  $K_g$ , la combinaison linéaire  $\alpha f + \beta g$  est lipschitzienne de constante  $|\alpha|K_f + |\beta|K_g$  car, par l'inégalité triangulaire,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(y)| \leq |\alpha|K_f|x - y| + |\beta|K_g|x - y|.$$

3. Supposons  $f \in \mathcal{L}$ . Alors pour tout  $x \neq y$ , on a :

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq K_f$$

En faisant tendre  $y$  vers  $x$ , on obtient pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f'(x)| \leq K_f$ .

Réciproquement, si  $f'$  est bornée par une constante  $K$ , on a d'après l'inégalité des accroissements finis

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

4. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions lipschitziennes bornées. Alors pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \quad (4)$$

$$\leq \|f\|_{\infty}^{\mathbb{R}} |g(x) - g(y)| + \|g\|_{\infty}^{\mathbb{R}} |f(x) - f(y)| \quad (5)$$

$$\leq \left( \|f\|_{\infty}^{\mathbb{R}} K_g + \|g\|_{\infty}^{\mathbb{R}} K_f \right) |x - y| \quad (6)$$

Considérons  $f : x \mapsto x$  et  $g : x \mapsto \sin(x)$ . Comme ces fonctions sont dérivables et lipschitziennes, il suffit d'étudier le caractère borné de  $(fg)'$  pour conclure. Or  $x \mapsto (fg)'(x) = (x+1)\sin(x)$  n'est pas bornée, ce qui fournit un contre exemple.

5. Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  fixé. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|f(x) - f(x_0)| \leq K_f |x - x_0|$ . Et

$$|f(x)| - |f(x_0)| \leq K_f |x| + K_f |x_0|$$

ce qui donne le résultat avec  $A = K_f$  et  $B = K_f |x_0| + |f(x_0)|$ .

6. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Par symétrie, on peut supposer  $x \geq y$ . En notant  $n = E(x - y)$ , la partie entière de  $x - y$ , alors il existe  $t \in [0, 1]$ , tel que  $x = y + n + t$ , et donc

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(y + n) + f(y + n) - f(y + n + 1) + \dots + f(y + 1) - f(y)| \leq M(t + 1 + \dots + 1)$$

c'est-à-dire  $|f(x) - f(y)| \leq M(x - y)$ .

## Partie II

1. (a) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $|f(x)| \leq A|x| + B$  d'après la partie précédente. D'où

$$|\lambda|^n |f(x + na)| \leq |\lambda|^n (A|x + na| + B)$$

qui est le terme général d'une série convergente ( par utilisation de la règle de D'Alembert par exemple ). Il suffit alors de constater que  $F$  est bien définie par ce qui précède, et qu'elle vérifie (\*). L'unicité est acquise par la condition nécessaire de la question 1 ( partie I ) et de plus, on a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$|F(x) - F(y)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (f(x + na) - f(y + na)) \right| \quad (7)$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n |f(x + na) - f(y + na)| \quad (8)$$

$$\leq \left( \frac{1}{1 - |\lambda|} \right) |x - y| \quad (9)$$

et donc  $F \in \mathcal{L}$ .

- (b) Pour  $f_1$  on applique le calcul de la série géométrique pour obtenir  $F_1(x) = \frac{1}{1 - \lambda}$ . Pour  $f_2$  on utilise la même technique

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (\exp(ix + ina) + \exp(-ix - ina)) \quad (10)$$

$$= \frac{\exp(ix)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \exp(ia))^n + \frac{\exp(-ix)}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \exp(-ia))^n \quad (11)$$

$$= \frac{\exp(ix)}{2} \frac{1}{1 - \lambda \exp(ia)} + \frac{\exp(-ix)}{2} \frac{1}{1 - \lambda \exp(-ia)} \quad (12)$$

$$= \frac{\exp(ix)(1 - \lambda \exp(-ia)) + \exp(-ix)(1 - \lambda \exp(ia))}{2(1 - 2\lambda \cos(a) + \lambda^2)} \quad (13)$$

Mêmes calculs pour  $f_3$ .

2. L'argument est identique aux questions précédentes, puisque  $|\lambda^{-1}| < 1$ .

## Partie III

1. (a) Soit  $F$  lipschitzienne telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) - F(x+a) = f(x)$ . Alors

$$|f(x)| = |F(x) - F(x+a)| \leq K_F |a|$$

et il est donc nécessaire que  $f$  soit bornée.

- (b) Toute fonction  $x \mapsto A \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$  avec  $A \in \mathbb{R}$  convient, une telle fonction n'est donc pas unique.
2. (a) Comme précédemment, toute fonction  $x \mapsto A \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$  convient.
- (b) i. Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé, la suite de terme général  $f(x+n)$  est positive, décroissante et tend vers 0. La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n f(x+n)$  est donc convergente d'après le critère spécial des séries alternées.
- ii. On pose comme dans la question précédente  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f(x+n)$ . Alors

$$F(x+1) + F(x) = f(x)$$

et par le théorème des séries alternées,  $0 \leq F(x) \leq f(x)$ , donc  $F$  est aussi de limite nulle en  $+\infty$ . Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $0 \leq x - y \leq 1$ , et

$$F(x) - F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (f(x+n) - f(y+n)).$$

L'inégalité des accroissements finis, la décroissance de  $f$  et la croissance de  $f'$  donnent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$f(x+n) - f(y+n) \leq (x-y)f'(x+n) \leq (x-y)f'(x+n+1) \leq f(x+n+1) - f(y+n+1) \leq 0.$$

$F(x) - F(y)$  apparait donc comme la somme d'une série qui satisfait aux hypothèses du théorème des séries alternées. On en déduit que

$$|F(x) - F(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq K_f(x-y).$$

D'après la partie précédente, on peut en déduire que  $F$  appartient à  $\mathcal{L}$ . Soit enfin  $G$  une fonction de  $\mathcal{L}$ , tendant vers 0 en  $+\infty$  et vérifie (\*). La fonction  $G - F$  est 1-antipériodique ( $\forall x \in \mathbb{R}, (G - F)(x+1) = -(G - F)(x)$ ) et tend vers 0 en  $+\infty$ , donc est nulle,  $F$  est bien la seule solution dans  $\mathcal{L}$  qui tend vers 0 en  $+\infty$

• • • • •