Devoir libre $n^\circ 13$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

●●●●●●●●●●●

Exercice 1

1. (a) Soit B_k l'événement « on a obtenu un résultat différent de 6 au k-ième lancer ». On a donc $A_k = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}$, d'où :

$$p(A_k) = \prod_{i=1}^{k-1} p(B_i)p(\overline{B_k}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}.$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) = \frac{1}{6} \times \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{5}{6}} = 1.$

(b) Soit C_3 l'événement considéré. Soit D_k l'événement « on a obtenu un 6 au k-ième lancer ». On a $C_3 = D_1 \cup C_2 \cup C_3$, d'où :

$$p(C_3) = 1 - p\left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \overline{C_3}\right) = 1 - p\left(\overline{C_1}\right)\left(\overline{C_2}\right)\left(\overline{C_3}\right) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3.$$

(c) Soit C_k l'événement « on a obtenu le premier 6 au plus tard au k-ième lancer ». Alors, $C_k = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} D_k$ et donc, comme précédemment,

$$p(C_k) = 1 - \prod_{i=1}^{k} p(\overline{D_k}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

(d) Soit E_k l'événement « obtenir le premier 6 entre $k+1$ et $2k$ », donc $E_k = \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) \cap \left(\displaystyle\bigcup_{j=k+1}^{2k} \overline{B_j}\right)$. D'où :

$$p(E_k) = p\left(\bigcap_{i=1}^{k} B_i\right) p\left(\bigcup_{j=k+1}^{2k} \overline{B_j}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^k \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^k\right).$$

2. (a) Si les $k-1$ premiers lancers n'ont pas donné de 6, alors juste avant qu'on ne lance le dé pour la k-ième fois, l'ure contient $k-1$ boules rouges et une boule blanche.

(b) Puisque $p(A_k) \neq 0$, on peut écrire :

$$p(B \cap A_k) = p(B/A_k) \times p(A_k) = \frac{1}{k} \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(B \cap A_k) = \frac{1}{5} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^k = -\frac{1}{5} \times \ln\left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{\ln(6)}{5}.$$

(c) Puisque $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet, alors $B = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} (B \cap A_k)$. D'où :

$$p(B) = \sum_{k=1}^{\infty} p(B \cap A_k) = \frac{\ln(6)}{5}.$$

Exercice 2

1. Supposons tout d'abord qu'il existe une telle solution f avec un rayon de convergence $R>0$ et posons $a_0=1$. Par théorème du cours f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-R,R[$ et ses dérivées vérifient sur cet intervalle

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

et

$$xf''(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n.$$

On a donc

$$0=2xf''(x)+f'(x)-f(x)=2\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

On en déduit par unicité du développement en série entière que pour tout $n\geq 0$,

$$2n(n+1)a_{n+1}+(n+1)a_{n+1}-a_n=0,$$

c'est-à-dire

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{(2n+1)(n+1)}.$$

Comme on a $a_0=1$ les coefficients sont uniquement déterminés, donc il y a unicité d'une telle solution.
De plus $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(n+1)}=0$, donc $R=+\infty$.
Enfin, pour calculer une expression de f à l'aide des fonctions usuelles on va chercher une expression exacte de a_n : on peut réécrire la relation de récurrence $a_{n+1}=\dfrac{2}{(2n+1)(2n+2)}a_n$, dont on déduit l'égalité, pour tout entier $n\geq 0$,

$$a_n=\frac{2^n}{(2n)!}.$$

Cela donne

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{(2n)!}.$$

• Si $x\geq 0$, alors $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2x})^{2n}}{(2n)!}=\operatorname{ch}\left(\sqrt{2x}\right)$.

• Si $x\leq 0$, alors $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{-2x})^{2n}}{(2n)!}=\cos\left(\sqrt{-2x}\right)$.

2. Pour effectuer le changement de fonction $y=zf$ on étudie les points où f s'annule : pour $x\in\mathbb{R}$ on a

$$f(x)=0\Leftrightarrow\left(x<0 \text{ et } \cos\left(\sqrt{-2x}\right)=0\right)\Leftrightarrow x=\frac{-\pi^2}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2=c_k,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Soit I un intervalle ne contenant pas 0 et où f ne s'annule pas. Pour $x\in I$ on calcule

$$2xy''+y'-y=2x(z''f+2z'f'+zf'')+(z'f+zf')-zf=2xz''f+4xz'f'+z'f.$$

La fonction y est donc solution de (E) sur I si, et seulement si, la fonction $t=z'$ vérifie $2xft'+(4xf'+f)t=0$ ou encore $t'+\dfrac{4xf'+f}{2xf}t=0$. On a $\dfrac{4xf'+f}{2xf}=2\dfrac{f'}{f}+\dfrac{1}{2x}$ qui est la dérivée logarithmique de $f^2\sqrt{|x|}$. Les solutions de cette équation sont les $t=\dfrac{\alpha}{f^2\sqrt{|x|}}$ pour un $\alpha\in\mathbb{R}$, ce qui donne $z=\alpha G+\beta$ où G est une primitive $\dfrac{1}{f^2\sqrt{|x|}}$ et $\beta\in\mathbb{R}$ et finalement $y=\alpha fG+\beta f$.

Problème

Première partie

1. On effectue au hasard un tirage de deux boules simultanément de l'urne : il y a $\mathtt{C}_7^2 = 21$ tirages possibles. On note : A l'événement : « tirage de deux boules blanches ». Donc card $B = \mathtt{C}_5^2 = 10$ et la probabilité est $p(B) = \dfrac{10}{21}$.

2. (a) La variable aléatoire G peut prendre 4 valeurs : x (événement A), $-10x$ (événement B), y (événement C), -3 (événement D).

- $p(G = x) = p(A) = \dfrac{10}{21}$.
- $p(G = -10x) = p(B) = \dfrac{1}{21}$.
- $p(G = y) = p(C) = \dfrac{5 \times 2}{21} \times \dfrac{\mathtt{C}_4^2}{\mathtt{C}_5^2} = \dfrac{6}{21}$.
- $p(G = -3) = p(D) = \dfrac{5 \times 2}{21} \times \dfrac{4 \times 1}{\mathtt{C}_5^2} = \dfrac{4}{21}$.

k	x	$-10x$	y	-3
$p(X = k)$	$\dfrac{10}{10}$	$\dfrac{1}{21}$	$\dfrac{6}{21}$	$\dfrac{4}{21}$

(b) Espérance mathématique : $E(G) = x \times \dfrac{10}{21} - 10x \times \dfrac{1}{21} + y \times \dfrac{6}{21} - 3 \times \dfrac{4}{21}$, soit

$$E(G) = \frac{6y - 24}{21}.$$

Donc $E(G) = 0$ si, et seulement si, $y = 4$.

(c) On a $E(G^2) = x^2 \times \dfrac{6}{21} + (-10x)^2 \times \dfrac{1}{21} + y^2 \times \dfrac{6}{21} + (-3)^2 \times \dfrac{8}{21}$ et donc $\sigma(G) = \sqrt{E(G^2)} = \sqrt{\dfrac{110x^2 + 60}{21}}$.

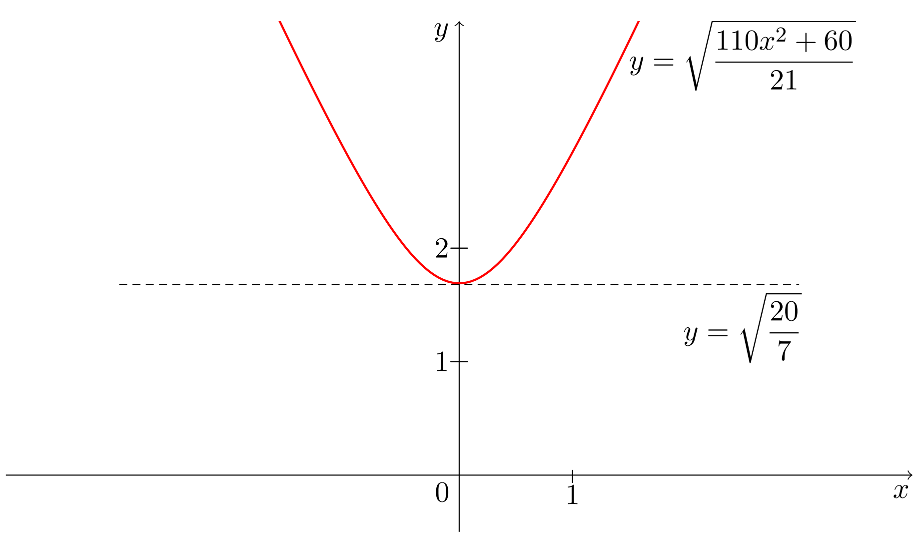
Deuxième partie

1. Si $\alpha \leq 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \alpha x] = +\infty$, donc nécessairement $\alpha \geq 0$. Donc si $\alpha < 0$, on écrit

$$f(x) - \alpha x = \frac{\left(\frac{110}{21} - \alpha^2\right) x^2 + \frac{60}{21}}{\sqrt{\frac{110x^2+60}{21}} + \alpha x}$$

Donc si $\alpha = \sqrt{\dfrac{110}{21}}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \alpha x] = 0$.

2.



3. $\sigma(G)$ est compris entre 7 et 8 si, et seulement si, $8,81 \leq x^2 \leq 14,92$, et comme x est un entier, alors $x = 3$.