Devoir libre $n°02$
Correction

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

••••••••••••

I-Quelques exemples

1. Posons $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ avec $a_{12} = a_{13} = a_{31} = 1$ et les autres coefficients sont nuls. Posons $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$ et $\sigma(3) = 2$. σ est une bijection de $[\![1,3]\!]$ et $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j) \end{cases}$. Ainsi $\sigma \in \mathscr{S}_3$ et $A = P_\sigma$.

2. (a) De même, on vérifie que $A = P_\sigma$ avec $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 1$ et $\sigma(4) = 2$.

(b) Les calculs montrent que $A^2 = I_4$, donc A est une matrice d'une symétrie. Montrons $\mathbb{R}^4 = \ker(A - I_4) \oplus \ker(A + I_4)$.
D'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, on a $x = \frac{1}{2}(x + f_\sigma(x)) + \frac{1}{2}(x - f_\sigma(x))$ avec $\frac{1}{2}(x + f_\sigma(x)) \in \ker(A - I_3)$ et $\frac{1}{2}(x - f_\sigma(x)) \in \ker(A + I_3)$ (on confond l'endomorphisme f_σ et la matrice associée A). Donc $\mathbb{R}^4 = \ker(A - I_4) + \ker(A + I_4)$.
Ensuite, pour tout $x \in \ker(A - I_4) \cap \ker(A + I_4)$, on a $f_\sigma(x) - x = f_\sigma(x) + x = 0$ donc par soustraction, on trouve $2x = 0$. Donc $\ker(A - I_4) \cap \ker(A + I_4) = \{0\}$, d'où :

$$\mathbb{R}^4 = \ker(A - I_4) \oplus \ker(A + I_4).$$

3. (a) $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) On trouve $P_\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$ (A la matrice de la question **2.**) et $P_\sigma^4 = I_4$.

(c) Cherchons une base (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) de $\mathbb{R}^4$ telle que $f_\sigma(e'_1) = e'_1$, $f_\sigma(e'_2) = -e'_2$, $f_\sigma(e'_3) = e'_4$ et $f_\sigma(e'_4) = -e'_3$.

Si on pose $e'_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, on obtient le système $\begin{cases} z &= x \\ t &= y \\ x &= z \\ y &= t \end{cases}$, donc $x = y = z = t$. On prend, par exemple, $e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De même, on obtient $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $f_\sigma(e'_3) = e'_4$, alors $f_\sigma^2(e'_3) = f_\sigma(e'_4) = -e'_3$ (f_σ^2 est représenté par la matrice A de la question **2.**), on obtient donc le système $\begin{cases} z &= -x \\ t &= -y \\ x &= -z \\ y &= -t \end{cases}$, on prend donc $e'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour le vecteur

e_4' on prend $e_4' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On peut donc vérifier que (e_1', e_2', e_3', e_4') est une base de $\mathbb{R}^4$ et que la matrice de f_σ dans cette base s'écrit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, P_σ et M sont semblables et on a la relation de similitude : $P_\sigma = PMP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

II-Un peu de généralités

1. Supposons que σ est la permutation identique, alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(i) = i$. Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$. Alors $P_\sigma = I_n$.

2. L'application : $\varphi : \sigma \mapsto P_\sigma$ est une bijection de $\mathscr{S}_n$ sur $\mathscr{P}_n$, en effet, elle est surjective par construction. Montrons qu'elle est injective :
Soit $(\sigma, \tau) \in \mathscr{S}_n^2$ tel que $P_\sigma = P_\tau$. Montrons que $\sigma = \tau$. Posons $P_\sigma = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $P_\tau = (q_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $p_{ij} = q_{ij}$.
Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Posons $i = \sigma(j)$, donc $p_{ij} = 1$ et par conséquent $q_{ij} = 1$, alors nécessairement $\tau(j) = i = \sigma(j)$ et ceci pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, donc $\sigma = \tau$. Ceci montre que φ est injective.
Ainsi φ est une bijection de $\mathscr{S}_n$ dans $\mathscr{P}_n$, $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{P}_n$ sont équipotents, $\mathscr{P}_n$ est alors fini et

$$\mathrm{card}(\mathscr{P}_n) = \mathrm{card}(\mathscr{S}_n) = n!.$$

3. (a) On sait que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $f_\sigma(e_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$ et comme $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j) \end{cases}$, alors $f_\sigma(e_j) = p_{\sigma(j)j} e_{\sigma(j)} = e_{\sigma(j)}$.

(b) Notons f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathscr{B}$. AP_σ est la matrice de $f \circ f_\sigma$ dans la base $\mathscr{B}$.
On a donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $f \circ f_\sigma(e_i) = f(f_\sigma(e_i)) = f(e_{\sigma(i)}$. Ainsi la i-ème colonne de AP_σ est la $\sigma(i)$-ème colonne de A. Par conséquent, multiplier une matrice A à droite par P_σ revient à permuter les colonnes de la matrice A, en appliquant la permutation correspondant σ.

4. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, notons a_{ij} le terme général de P_σ , b_{ij} celui de $P_{\sigma'}$ et c_{ij} celui du produit $P_\sigma P_{\sigma'}$.
On a $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i\sigma'(j)}$ car $b_{\sigma'(j)j} = 1$ et si $i \neq \sigma'(j)$, $b_{ij} = 0$. Si $i = \sigma[\sigma'(j)]$, alors $c_{ij} = a_{\sigma[\sigma'(j)]\sigma'(j)} = 1$, sinon $c_{ij} = 0$, donc $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.

5. Notons σ_0 la permutation identique de $[\![1,n]\!]$. $P_{\sigma_0} = I_n$, donc $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n$, $P_\sigma P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma^{-1} \circ \sigma} = P_{\sigma_0} = I_n$, donc P_σ est inversible et $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$. En particulier $(\mathscr{P}_n, .)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), .)$.

6. (a) On déduit de **4.** et **5.** que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P_\sigma^k = P_{\sigma^k}$. Or $\sigma^k \in \mathscr{S}_n$ donc $P_\sigma^k \in P_n$.

(b) Notons $E_\sigma = \left\{ P_\sigma^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$. E_σ est une partie de $\mathscr{P}_n$ qui a un nombre fini d'éléments donc il existe au moins deux éléments de E_σ qui sont égaux. Donc il existe $q, q' \in \mathbb{N}$, $q \neq q'$ tels que $P_\sigma^q = P_\sigma^{q'}$.

(c) Supposons que $q < q'$. On a alors $P_\sigma^{q'-q} = I_n$, donc il existe $r \in \mathbf{N}^*$ tel que $P_\sigma^r = I_n$.

7. (a) Soit $j \in [\![1,n]\!]$, on a $BP_\sigma(e_j) = B(e_{\sigma(j)}) = \sum_{i=1}^{n} b_{i\sigma(j)} e_i$ et $P_\sigma B(e_j) = f_\sigma(b(e_j)) = f_\sigma\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i\right) =$

$\sum_{k=1}^{n} b_{kj} f_\sigma(e_k) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} e_{\sigma(k)} = \sum_{i=1}^{n} b_{\sigma^{-1}(i)j} e_i$. D'où :

$$BP_\sigma = P_\sigma B \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \ b_{i\sigma(j)} = b_{\sigma^{-1}(i)j}.$$

(b) Soit $\sigma \in \mathscr{S}_n$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. D'après la question précédente, il suffit de montrer que $m_{i\sigma(j)} = m_{\sigma^{-1}(i)j}$ pour conclure que $M(\alpha,\beta) \in \mathscr{L}$.
• Premier cas : $\sigma(j) \neq i$, alors $\sigma^{-1}(i) \neq j$, ainsi $m_{i\sigma(j)} = \beta = m_{\sigma^{-1}(i)j}$.
• Deuxième cas : $\sigma(j) = i$, alors $\sigma^{-1}(i) = j$, ainsi $m_{i\sigma(j)} = m_{ii} = \alpha = m_{jj} = m_{\sigma^{-1}(i)j}$.
D'où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i\sigma(j)} = m_{\sigma^{-1}(i)j}$. Ainsi $M(\alpha,\beta)P_\sigma = P_\sigma M(\alpha,\beta)$ et donc $M(\alpha,\beta) \in \mathscr{L}$.

(c) Réciproquement, soit $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ un élément de $\mathscr{L}$. $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n$, $BP_\sigma = P_\sigma B$ et donc $\forall \sigma \in \mathscr{S}_n$, $\forall (i,j)$, $b_{i\sigma(j)} = b_{\sigma^{-1}(i)j}$. Posons $\alpha = b_{11}$ et $\beta = b_{12}$.
• Soit $i \in [\![2,n]\!]$. Considérons un élément σ de $\mathscr{S}_n$ tel que $\sigma(1) = i$ (par exemple : $\sigma(1) = i$, $\sigma(i) = 1$ et $\forall k \in [\![1,n]\!] \setminus \{1,i\}$, $\sigma(k) = k$). Alors $b_{ii} = b_{i\sigma(1)} = b_{\sigma^{-1}(i)1} = b_{ii} = \alpha$. Finalement, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $b_{ii} = \alpha$.
• Soit $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Considérons un élément σ de $\mathscr{S}_n$ tel que $\sigma(1) = i$ et $\sigma(2) = j$ (il existe car $1 \neq 2$ et $i \neq j$). Alors

$$b_{ij} = b_{i\sigma(2)} = b_{\sigma^{-1}(i)2} = b_{12} = \beta$$

Finalement, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow b_{ii} = \beta$. Ainsi, $B = M(\alpha,\beta)$.

8. (a) Fixons j dans $[\![1,n]\!]$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j) \end{cases}$. Dans le j-ème colonne de P_σ le terme $P_{\sigma(j)j}$ vaut 1 et les autres sont nuls. Dans chaque colonne de P_σ, il y un 1 et un seul, les autres coefficients étant nuls.

(b) Fixons i dans $[\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{si } i \neq \sigma(j) \end{cases}$. Dans le i-ème colonne de P_σ le terme $P_{i\sigma^{-1}(i)}$ vaut 1 et les autres sont nuls. Dans chaque ligne de P_σ, il y un 1 et un seul, les autres coefficients étant nuls.

(c) On note σ_0 la permutation identique de $[\![1,n]\!]$. Ici $P_\sigma \neq I_n = P_{\sigma_0}$. Ainsi $\sigma \neq \sigma_0$, alors il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(j) \neq j$ et donc $p_{jj} = 0$ car $j \neq \sigma(j)$. Posons $i = \sigma(j)$, $i \neq j$. Nécessairement $\sigma(i) \neq i$ (si $\sigma(i) = i$, alors $\sigma(i) = \sigma(j)$ et donc $i = j$ ce qui est faux) et donc $p_{ii} = 0$, ainsi $p_{ii} = p_{jj} = 0$ avec $i \neq j$, d'où :

$$\operatorname{tr}(P_\sigma) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = \sum_{k\in[\![1,n]\!]\setminus\{i,j\}} a_{kk} \leq n-2$$

car $p_{kk} \in \{0,1\}$ et $\operatorname{tr}(P_\sigma) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} \in [\![0,n]\!]$. En conclusion, si $P_\sigma \neq I_n$ alors $\operatorname{tr}(P_\sigma) \in [\![0,n-2]\!]$.

(d) Supposons que $\operatorname{tr}(P_\sigma) = n-2$, alors $\operatorname{tr}(P_\sigma) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = n-2$, comme $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $p_{kk} \in \{0,1\}$, il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$ et $p_{ii} = p_{jj} = 0$ et $\forall k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i,j\}$, $p_{kk} = 1$. Alors nécessairement $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$ et $\forall k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i,j\}$, $\sigma(k) = k$. Alors $\{\sigma(i),\sigma(j)\} = \{i,j\}$. Ainsi σ est une transposition.
Réciproquement supposons que σ est une transposition, il existe i, j, $i \neq j$, $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ et $\sigma(k) = k$. Alors $p_{ii} = p_{jj} = 0$ ($\sigma(i) \neq i, \sigma(j) \neq j$) $\forall k \neq i, j$, $p_{kk} = 1$ ($p_{kk} = 1$). Ainsi

$$\operatorname{tr}(P_\sigma) = n-2 \Leftrightarrow \sigma \text{ est une transposition.}$$

(e) Soient σ et τ des permutations de $[\![1,n]\!]$ telles que $\operatorname{tr}(P_\sigma) = \operatorname{tr}(P_\tau) = n-2$. Alors σ et τ sont deux transpositions :

$$\exists (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \ i \neq j \ \text{ tel que } \sigma(i) = j, \sigma(j) = i \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i,j\},\ \ \sigma(k) = k.$$

De même

$$\exists (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \ i \neq j \text{ tel que } \sigma(i) = j, \sigma(j) = i \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i,j\},\ \ \sigma(k) = k.$$

$i \neq j$ et $i' \neq j'$, on peut donc trouver une permutation μ telle que $\mu(i) = i'$ et $\mu(j) = j'$. On sait que $\mu^{-1} \circ \tau \circ \mu = \sigma$, alors $P_\sigma = P_{\mu^{-1} \circ \tau \circ \mu} = {P_\mu}^{-1} P_\tau P_\mu$ par conséquent P_σ et P_τ sont semblables.

•••••••••••